Práctica 1

1. Un *paralelogramo* es un cuadrilátero donde los lados opuestos son paralelos. Probar que si en un cuadrilátero los lados opuestos son iguales, entonces es un paralelogramo.

2. Probar que en un paralelogramo las diagonales se cortan a la mitad y que los lados opuestos son iguales.

3. Probar que si las diagonales de un cuadrilátero convexo se cortan a la mitad, entonces dicho cuadrilátero es un paralelogramo.

4. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y sea P el punto de intersección de sus diagonales. Probar que $ABCD$ es un trapecio con $AB \parallel CD$ si y solamente si $[APD] = [BPC]$.

5. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y sean M y N los puntos medios de los lados AB y CD. Probar que si el segmento MN divide al cuadrilátero $ABCD$ en dos cuadriláteros de igual área, entonces $ABCD$ es un trapecio.

6. Sea ABC un triángulo. Sean L, M y N los puntos medios de BC, CA y AB respectivamente. Probar que los triángulos ANM, NBL, MLC y LMN son semejantes a ABC.

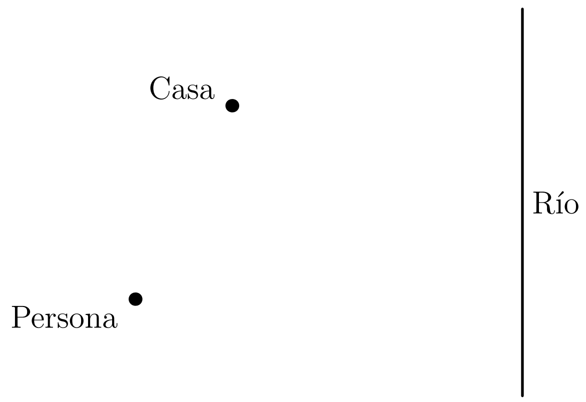
7. Sea $ABCD$ un cuadrilátero. Probar que los puntos medios de los lados son vértices de un paralelogramo (llamado *paralelogramo de Varignon*).

8. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Probar que el área del paralelogramo de Varignon de $ABCD$ es la mitad del área de $ABCD$.

9. Sea ABC un triángulo tal que $\angle BAC = 90°$. Sea M el punto medio de BC. Probar que $AM = BM = CM$. (En palabras, el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de los tres vértices).

10. Sean $ABCD$ y $A'B'C'D'$ dos paralelogramos. Probar que existe una recta que divide a ambos en pedazos de igual área.

11. ¿Qué recorrido debe realizar la persona si quiere ir a su casa caminando lo menos posible pero antes debe pasar por el río a buscar agua?



12. Un *rombo* es un cuadrilátero con sus cuatro lados iguales. Demostrar que en un rombo las diagonales son perpendiculares.

13. Sean ABC un triángulo y D un punto en el lado BC tal que $\angle BAD = \angle DAC$. Si $DC = 2$, $AB = 6$ y $AC = 4$, hallar el perímetro de ABC.

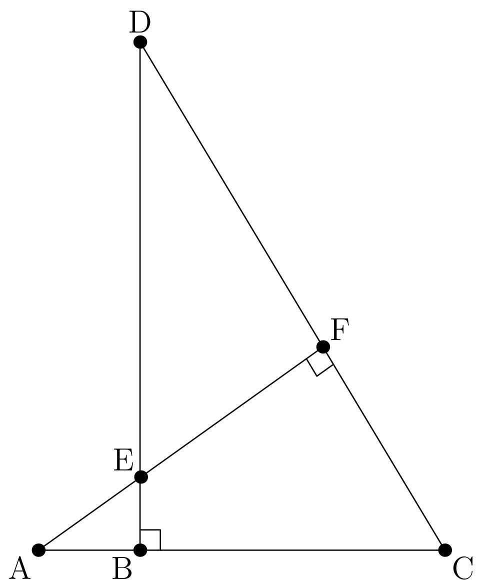
14. En un cuadrilátero convexo $ABCD$ las diagonales son perpendiculares. Demostrar que $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

15. Probar que todo triángulo se puede partir en triángulos isósceles.

16. Sea P un punto en el interior de un triángulo equilátero. Demostrar que la suma de las distancias de P a cada uno de los lados del triángulo es igual a la altura del triángulo.

17. Sea ABC un triángulo rectángulo en A. Sea D en BC el pie de la altura. Si $BD = 2$ y $DC = 8$, hallar el área del triángulo ABC.

18. En la siguiente figura se tiene $AC = 12$, $DB = 15$ y $DC = 18$. ¿Cuánto mide AF?



19. **Otra demostración del teorema de la bisectriz.** Sea ABC un triángulo y sea D en el lado BC tal que $\angle BAD = \angle CAD$.

    (i) Probar que $\dfrac{[ABD]}{[ACD]} = \dfrac{BD}{CD}$.

    (ii) Probar que $\dfrac{[ABD]}{[ACD]} = \dfrac{AB}{AC}$.

    (iii) Concluir que $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AC}$.

20. Probar que el circuncentro y el ortocentro de un triángulo obtusángulo están fuera del triángulo.

21. Demostrar que un triángulo con dos medianas iguales es isósceles.

22. Demostrar que un triángulo con dos alturas iguales es isósceles.