Lista de ejercicios de Geometría Riemanniana (2da parte)
(Primer cuatrimestre de 2019)

1) Una variedad Riemanniana (M, g) se dice homogénea si para todo $p, q \in M$ existe una isometra $\varphi : M \longrightarrow M$ tal que $\varphi(p) = q$. Probar que si (M, g) es homogénea entonces es completa.

2) Sea (M, g) una variedad Riemanniana de dimensión n. Probar que dado $p \in M$ existe un entorno U de p y n campos $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}(U)$ tales que
   i) $g(X_i(q), X_j(q)) = \delta_{ij}$.
   ii) $\nabla_{X_i} X_j|_p = 0$.

3) Sean (M, g) y (N, h) dos variedades Riemannianas completas y $f_1, f_2 : M \longrightarrow N$ isometrías locales. Supongamos que existe $p \in M$ tal que $f_1(p) = f_2(p)$ y $d_p f_1 = d_p f_2$. Probar que $f_1 = f_2$.

4) Sean (M, g) y (N, h) dos variedades Riemannianas.
   i) Calcular la curvatura seccional de la variedad producto $(M \times N, g + h)$.
   ii) Sea (M, g) es una variedad Riemanniana compacta y (N, h) una variedad Riemanniana compacta de curvatura escalar positiva. Probar que la curvatura escalar de $(M \times N, g + th)$ (con $t > 0$) tiende a infinito cuando t tiende a cero.

5) Sea $H^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \; x_n > 0\}$ dotado con la métrica $g_h = x_n^{-2} g_e^n$ (semiplano de Poincaré). Calcular su curvatura seccional.

6) Sea (S^n, g_0^n) la esfera $n-$dimensional dotada con su métrica estandar de curvatura 1. Probar que existe un único $t > 0$ tal que $(S^n \times S^m, g_0^n + t g_0^m)$ es una variedad de Einstein.

7) Mostrar un ejemplo de una variedad Riemanniana de curvatura escalar constante que no sea una variedad de Einstein y de una variedad de Einstein que no sea de curvatura seccional constante.