Lista de ejercicios de Geometría Riemanniana (1era parte)
(1er cuatrismestre de 2019)

1) Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Dado $p, q \in M$ definimos $d_g : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$d_g(p,q) := \inf \big\{ longitud(c) : \ c \text{ es curva suave a trozos que une } p \text{ y } q \big\}.$$

Probar que (M, d_g) es un espacio métrico.

2) Sea G un grupo de Lie. Decimos que una métrica Riemanniana es invariante a izquiera (derecha) si todas las traslaciones a izquierda (a derecha), es decir los difeomorsimos $L_a(b) = a.b$ ($R_a(b) = b.a$) con $a \in G$, son isometrías. Probar que las métricas invariantes a izquierda (derecha) están en relación uno a uno con los productos internos en el algebra de lie $\mathfrak{g} = T_eG$.

3) Sea (M, g) una variedad Riemanniana y $\pi : N \longrightarrow M$ un revestimiento suave. Es decir, π suryectiva, diferenciable y tal que para todo $p \in N$ existe un entorno conexo $p \in U_p$ de modo que $\pi^{-1}(U_p) = \bigcup_\alpha V_\alpha$ donde V_α son abiertos disjuntos dos a dos y $\pi|_{V_\alpha} : V_\alpha \longrightarrow U_p$ es un difeomorfismo. Probar que existe una única métrica Riemanniana h en N tal que π resulta una isometría local. En ese caso decimos que $\pi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ es un revestimiento Riemanniano.

4) Sea (M, g) una variedad Riemanniana y G un subgrupo discreto de isometrías que actúa libre y en forma propiamente discontinua sobre M. Es decir, se satisface que para todo $p \in M$ existe un abierto $p \in U$ tal que $U \cap gU = \emptyset$ para todo $g \in G$ y si $[p] \neq [q]$ existen entornos U y V tal que $g.U \cap V = \emptyset$ para todo $g \in G$.
   a) Probar que existe una única métrica Riemanniana h tal que $\pi : (M, g) \longrightarrow (M/G, h)$ es un revestimento Riemanniano
   b) Concluir que $\mathbb{R}P^n$ y T^n son localmente isométricos a la esfera (S^n, g_0^n) y al espacio Euclídeo $(\mathbb{R}^n, g_e)$ respectivamente.

5) Un lattice completo Γ sobre $\mathbb{R}^n$ es un subgrupo de $(\mathbb{R}^n, +)$ de la forma $\Gamma = \{\sum_{i=1}^n z_i v_i : \ z_i \in \mathbb{Z}\}$ donde $\{v_1 \ldots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$. Notar que T^n es difeomorfo a $\mathbb{R}^n/\Gamma$, donde Γ actúa sobre $\mathbb{R}^n$ por traslaciones. Sea g_Γ la métrica inducida por la acción de Γ (ver ejercicio anterior). Calcular la expresión local de g_Γ. Probar que (T^n, g_Γ) es isométrica a $(T^n, g_{\tilde{\Gamma}})$ si y solo si existe una isometría de $\mathbb{R}^n$ tal que $f(\Gamma) = \tilde{\Gamma}$.

6) Decimos que una variedad Riemanniana (M, g) es localmente conforme plana si para todo $p \in M$ existe un entorno $p \in U$ y $f : (U, g|_U) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, g_e)$ un difeomorfismo conforme, es decir que $(f^{-1})^*(g_e) = hg$ para alguna $h \in C^\infty(U)$. Probar que (S^n, g_0^n) y $(S^{n-1} \times S^1, g_0^{n-1} + dt^2)$ son localmente conforme planas.

7) Sea $f : M \longrightarrow \bar{M}$ una inmersión. Si $\bar{g}$ es una métrica sobre $\bar{M}$ con conexión de Levi-Civita $\bar{\nabla}$. Consideremos la métrica $g = f^*(\bar{g})$ y ∇ su conexión de Levi-Civita. Probar que

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T$$

donde $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathfrak{X}(\bar{M})$ son extensiones locales de $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

8) Probar que ∇ es una conexión simétrica si y solo si $\nabla^2 u$ (hessiano de u) es un tensor simétrico para todo $u \in C^\infty(M)$.

9) Sea (M, g) una variedad Riemanniana de dimensión n y $c : I \longrightarrow M$ una curva suave a trozos. Probar que $\mathfrak{X}_c''(M)$, el espacio de campos paralelos a lo largo de c, es un espacio vectorial de dimensión n.

10) Sea (M, g) una variedad Riemanniana y ∇ su conexión de Levi-Civita. Sea $c : I \longrightarrow M$ una curva suave y $X \in \mathfrak{X}(M)_c$, un campo vectorial tangente a lo largo de c. Probar que

$$\nabla_D X|_{t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{(P^c_{t_0 t})^{-1}(X(t)) - X(t_0)}{t - t_0},$$

donde $P^c_{t_0 t} : T_{t_0} M \longrightarrow T_{c(t)} M$ es el transporte paralelo a lo largo de c entre $c(t_0)$ y $c(t)$.
Probar también que si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene que

$$\nabla_X Y|p = \lim_{t \to t_0} \frac{(P^c_{0t})^{-1}(Y(c(t)) - Y(p)}{t},$$

donde c es una curva suave tal que $c(0) = p$ y $c'(0) = X(p)$.

11) Sea (M, g) una variedad Riemanniana con conexión ∇. Sea (U, x) una carta de M y $(TU, \bar{x})$ la carta inducida en TM. Denotamos con $\{A_1(u), \ldots, A_{2n}(u)\}$ los vectores tangentes inducidos por la carta $(TU, \bar{x})$. Si $b \in Tu(TM)$ es $b = \sum_{i=1}^{2n} b_i A_i(u)$ probar que la función de conexión K asociada a ∇ es

$$K(b) = \sum_{k=1}^{n} \Big(b_{n+k} + \sum_{1 \le i,j \le n} b_i \bar{x}^j(u) \Gamma^k_{ij}(\pi(u)) \Big) \frac{\partial}{\partial x^k}|_{\pi(u)}$$

12) Sea K la función de conexión de (M, g). Si $X \in \mathfrak{X}_c$ verificar que

$$\nabla_D X|_t = K(X'(t)).$$

13) Sean (M, g) y (N, h) dos variedades Riemannianas y $f : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ una isometría local. Si $c : I \longrightarrow M$ es una geodésica de (M, g), entonces $f \circ c$ es una geodésica de (N, h).

14) Sea (M, g) una variedad Riemanniana y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Ver que son equivalentes:
a) $\nabla_X X \equiv 0$

b) Toda curva integral de X es una geodésica.

15) Sea (H^2, g_h^2) el semiplano de Poincaré, es decir $H^2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ y $g_h^2((x,y))(v,w) := y^{-2}\sum_{i=1}^{2} v_i w_i$. Calcular los símbolos de Christoffel de la carta canónica. Calcular las geodésicas de este modelo (parametrizaciones a velocidad constante de rectas verticales y circunferencias centradas en el eje x.)