1

(1) Termizar demo ~~Repaso~~ Simpson (1)
(Ulsegnovierno)

Faltaba de interpolación

tenemos el problema aproximar

$\min \int_a^b (f(x) - p(x))^2 \, w(x)$ $\quad p \in \mathbb{P}_m$

Faltaría discernir caso usando la proyección

ortonormalización: $\{u_1, \dots, u_n\}$ base ~~cierta~~ conjunto li de espacio vectorial con producto interno.

$\Rightarrow \quad v_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$

$r_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k, v_i \rangle v_i$

$v_k = \dfrac{r_k}{\|r_k\|}$

~~$\{v_1, \dots, v_n\}$~~ es una base ortonormal

$\{v_1, \dots, v_n\}$ de $\{u_1, \dots, u_n\}$

Inductivo

$\langle r_j, r_k \rangle = \langle r_j, u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k, v_i \rangle v_i \rangle$

$= \langle r_j, u_k \rangle - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k, v_i \rangle \langle r_j, v_i \rangle$

$= \langle r_j, u_k \rangle - \langle u_k, v_j \rangle \langle r_j, v_j \rangle$

$\langle r_j, \dfrac{r_j}{\|r_j\|} \rangle = \|r_j\|$

$\langle v_j, v_k \rangle = \dfrac{\langle v_j, u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k, v_i \rangle v_i \rangle}{\|r_k\|}$

$= \langle v_j, u_k \rangle - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k, v_i \rangle \langle v_j, v_i \rangle$

$= \langle v_j, u_k \rangle - \langle u_k, v_j \rangle = 0$

luego

Teorema:

~~El calculo del proyecto~~

Dado $x \in V$ y S subespacio de V de dimensión finita $\Rightarrow \exists!\, y \in S$ t.q. $\langle x-y, s\rangle = 0$ $\forall s \in S$

y se llama proyección ortogonal

$$y = \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i\rangle v_i$$ donde $\{v_1, \dots, v_n\}$ base ortonormal.

Dem: $\{v_1, \dots, v_n\}$

$$\langle x-y, v_j\rangle = \langle x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i\rangle v_i, v_j\rangle$$

$$= \langle x, v_j\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i\rangle \langle v_i, v_j\rangle$$

$$= \langle x, v_j\rangle - \langle x, v_j\rangle = 0$$ $\forall v_j$ de la base

Por linealidad vale $\forall s \in S$.

Aplicación $V = C[a,b]$ $\quad \beta = \{1, \dots, x^m\}$
lo hacemos por ortonormalización luego $\{P_0, \dots, P_m\}$ base ortonormal.

$$P_m^* = Pf = \sum_{i=0}^{m} \langle f, P_i\rangle P_i$$

OBS: P_n es ortonormal a todos los polinomios de grado menor que k. (homogéneos) corolario: $f \in C[a,b]$ el polin P_m^* $<,>$ producto interno (1)

unpd $\|f - P_m^*\| \leq \|f - P\|$ $\forall p \in P_m$

donde $\|\cdot\|$ es la norma asociada.

$$P_m^* = \sum_{i=0}^{m} <f, P_i> P_i$$

D: Sale del teorema $2\,\|x-s\| \leq$
$\|x-s^*\| = \min_{s \in S}$

$\Leftrightarrow <x-s^*, s> = 0 \quad \forall s \in S$

(1) ortonormalizar
(2) construir la proyección ortonormal de esta forma.

Volviendo a Reglas de cuadratura. Como usamos los polinos ortonormales.

Ya vimos que P_k es ortonormal a todos los polinomios de grado $\leq k$.

$q_k = c P_k$ polinomio monico. Este es único polinomio ortogonal a todos los menor que k.

$\tilde{q}_k$ ortogonal a los menor que k y monico $\Rightarrow$

$<\underbrace{q_k - \tilde{q}_k}_{\text{grado} < k}, q_k> = 0 \quad \Rightarrow \quad \|q_k - \tilde{q}_k\| = 0 \quad \Rightarrow q_k = \tilde{q}_k$

$< q_k - \tilde{q}_k, \tilde{q}_k > = 0$

Idea es usar las raíces de los polinomios

Regla de cuadratura Gaussiana

No fijamos x_i ni A_i

Ej $\quad Q(f) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$ $\quad$ queremos que sea exacta para grado máximo

$2 = \int_{-1}^{1} 1 = A_0 + A_1$

$0 = \int_{-1}^{1} x = A_0 x_0 + A_1 x_1 \longrightarrow x_1 = -\frac{A_0}{A_1} x_0 \quad A_1 \neq 0$

$\frac{2}{3} = \int_{-1}^{1} x^2 = A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2$

$0 = \int_{-1}^{1} x^3 = A_0 x_0^3 + A_1 x_1^3 \longrightarrow A_0 x_0^3 - A_1 \frac{A_0^3}{A_1^3} x_0^3 = 0$

$\left(A_0 - \frac{A_0^3}{A_1^2}\right) x_0^3 = 0 \quad x_0 = 0$

o $\quad A_0 - \frac{A_0^3}{A_1^2} = 0 \quad A_1^2 - A_0^2 = 0$

$A_0 = A_1$

$A_0 = -A_1 \to$ No cumple (1)

(1) $\quad 2A_0 = 2 \quad A_0 = A_1 = 1$

(2) $\quad x_0 + x_1 = 0 \to x_1 = -x_0$

(3) $\quad 2x_0^2 = 2/3 \quad x_0^2 = 1/3 \quad \left.\begin{array}{l} x_0 = \sqrt{\frac{1}{3}} \\ x_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}} \end{array}\right\}$ Es una solución

La idea es hacer esto en general.

(2)

Teoría: (dentro de 2 años)

La formula

$$\int_a^b P(x)\, w(x)\, dx = \sum_{j=0}^{n} A_j\, P(x_j)$$ si es exacta para grado n

es exacta para todo polino de grado $\leq 2n+1$ $\Leftarrow$

$\{x_j\}$ son los ceros de $P_{n+1}(x)$.

Es una $Q(f) = \sum_{j=0}^{m} A_j P(x_j)$ no exacta para grado $2n+2$.

la regla de cuadratura Gaussiana

Ejercicio: Para $Q(f) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$

$n=1$ $\boxed{2n+1 = 3}$

$P_{n+1}(x) = P_2(x) \rightarrow$ Busco los ceros de este polinomio. habría cuando de grado exacto hasta 3 que sos sea [illegible].

$\{1, x, x^2\}$

$\int_{-1}^{1} 1 = 2$ $\quad \int_{-1}^{1} x^2 = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = 2/3$

$v_1 = 1/\sqrt{2}$

$v_2 = \frac{x}{\|x\|} = x\sqrt{3/2}$

$\int_{-1}^{1} x^2 = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = 2/3$

$r_3 = x^2 - \langle x^2, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} - \underbrace{\langle x^2, \frac{x}{\|x\|} \rangle}_{=0} \frac{x}{\|x\|}$

$= x^2 - \frac{2}{3}\frac{1}{2} = x^2 - 1/3$

Base ortogonal

$\{1, x, x^2 - 1/3\}$ el $q_2(x) = x^2 - 1/3$ mónico ortogonal

raíces son $q_2(x) = \pm 1/3$

$-\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\qquad$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$

Exacta

$$2 = \int_{-1}^{1} 1 = A_0 + A_1 = 2A_0 \qquad A_0 = 1$$

$$0 = \int_{-1}^{1} x = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

$$= -A_0 \frac{1}{\sqrt{3}} + A_1 \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad A_0 = A_1 = 1$$

$$\boxed{Q(f) = f\left(\tfrac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

$$Q(f) = 1 f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1 f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$ esto integra exacto polinomios de grado 3.

Ejer. Si quiero la regla Gaussiana en otro intervalo por ejemplo en $(0,3)$ uso teorema de cambio de variable

$$Q_0(f) = \sum_{i=0}^{m} A_i\, g(t_i)$$

$$Q(f) = \sum_{i=0}^{m} A_i \left(\frac{b-a}{2}\right) f(x_i) \qquad x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t_i$$

$$x_0 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\frac{b-a}{2} = \frac{3}{2} \qquad x_1 = \frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$Q(f) = \frac{3}{2}\left[f\left(\tfrac{3}{2}\left(1 - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) + f\left(\tfrac{3}{2}\left(1 + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \right]$$

Q_0 es exacta hasta grado $2n+1$ con el log

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ 2

7 4

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x) \cdot x^2 \qquad w(x) = x^2$$

x anula solo en cero (no es importante 1 punto).

Ver que hay muchas iguales.

Base ortonormal

$$\langle 1,1\rangle = \int_{-1}^{1} x^2 = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = 2/3$$

$$\langle 1,x\rangle = \int_{-1}^{1} x^3 = 0$$

$$\langle 1,x^2\rangle = \int_{-1}^{1} \cancel{x^2}\cdot x^2 = \int_{-1}^{1} x^4 = \langle x,x\rangle$$

$$= \frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$$

$$\langle 1,x^3\rangle = \int_{-1}^{1} x^3\cdot x^2 = 0 = \int_{-1}^{1} x^2 x \cdot x^2 = \langle x^2,x\rangle$$

$$\langle x^3,x\rangle = \int_{-1}^{1} x^4 x^2 = \int x^6 = x^7\Big|_{-1}^{1} = 2/7$$

$$\langle x^3,x^2\rangle = \int_{-1}^{1} x^5 x^2 = 0$$

$$v_1 = \frac{1}{\|1\|}$$

$$v_2 = \frac{x}{\|x\|}$$

$$v_3 = x^2 - \langle x^2,1\rangle \frac{1}{\|1\|\,\|1\|} - \overbrace{\langle x^2,x\rangle}^{=0} \frac{x}{\|x\|\,\|x\|} = x^2 - \frac{2}{5}\frac{1}{\|1\|^2}$$

$$= x^2 - \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{2} = x^2 - \cancel{\frac{4}{15}}\ \frac{3}{5}$$

$$v_4 = x^3 - \overbrace{\langle x^3, \tfrac{1}{\|1\|}\rangle}^{=0} \frac{1}{\|1\|} - \langle x^3, \tfrac{x}{\|x\|}\rangle \frac{x}{\|x\|} - \langle x^3, x^2 - \tfrac{4}{15}\rangle \frac{r_3}{\|r_3\|^2}$$

$$= x^3 - \frac{2}{7}\cdot\frac{x}{\|x\|^2} - \overbrace{\langle x^3, -\tfrac{4}{15}\rangle}^{=0} \frac{r_3}{\|r_3\|^2} - \langle x^3,x\rangle \frac{x}{\|x\|^2}$$

$$= x^3 - \frac{2}{7}\, x\, \frac{5}{2} = x^3 - x\,\frac{5}{7} \qquad 7x^3 - 5x$$

$$7 - 2 - 5 = 0$$

$m=2$

$$\frac{2}{3} = A_0 + A_1 + A_2 \qquad \frac{2}{5} = A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2$$

$$0 = A_0 x_0 + A_1 x_1 + A_2 x_2$$

(5) 8

$x = 0 \qquad x^2 = \frac{5}{7} \qquad x = \pm\sqrt{5/7}$

$$\frac{2}{3} = A_0 + A_1 + A_2$$

$$0 = A_0\left(-\sqrt{\frac{5}{7}}\right) + A_2\sqrt{\frac{5}{7}}$$

$$\frac{2}{5} = A_0\left(\frac{5}{7}\right) + A_2\left(\frac{5}{7}\right)$$

$$A_0 + A_2 = \frac{14}{25} \qquad A_0 = A_2 = \frac{7}{25}$$

$$2A_0 = \frac{14}{25}$$

$$A_0 = \frac{7}{25}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{14}{25} + A_1 \qquad A_1 = \frac{2}{3} - \frac{14}{25} = \frac{50 - \cancel{32}\,84}{25 \cdot 3}$$

$$A_1 = \frac{8}{75} \quad \cancel{0{,}1066}$$

$$Q(f) = \frac{7}{25} f\left(-\sqrt{\frac{5}{7}}\right) + \frac{8}{75} f(0) + \frac{7}{25} f\left(\sqrt{\frac{5}{7}}\right)$$

$\boxed{\text{Chequeo}}$: exacta grado $2n+1 = 5$ ok porque de caso

grado 4 $\qquad Q(x^5) = 0$

$$\int_{-1}^{1} x^4 \cdot x^2 = \frac{2}{7} = \frac{7}{25}\left(-\sqrt{\frac{5}{7}}\right)^4 + \frac{7}{25}\left(\sqrt{\frac{5}{7}}\right)^4$$

$$= \frac{7}{25}\left(\frac{5}{7}\right)^2 + \frac{7}{25}\left(\frac{5}{7}\right)^2$$

$$= 7\,\frac{1}{7^2} + 7\,\frac{1}{7^2} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7} \checkmark$$

obs $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ y $f(x) \geq 0$ y continua

$\Rightarrow f(x) = 0 \; \forall x$

Si tuviéramos que ver que es producto interno

$\int_a^b (f(x))^2 w(x) = 0$ $\quad f(x)^2 w(x) = 0 \; \forall x$

$f(x) = 0$ o $w(x) = 0$

pero $w(x) > 0 \; \forall x$ salvo $x=0$

$f(x) = 0 \; \forall x$ pero f continua

salvo $x \neq 0$

$\Rightarrow f \equiv 0.$

Formula del Error (dentro de 2 semanas)

$I(f) = \int_a^b f(x)\,w(x)$ y $\varphi_m(f)$ la regla de cuadratura Gaussiana

dados por los nodos asociados al polinomio ortogonal de grado q_{m+1}

$\Rightarrow$

Si $f \in C^{2m+2}[a,b]$

$$I(f) - \varphi_m(f) = \frac{f^{(2m+2)}(\eta)}{(2m+2)!} \int_a^b q_{m+1}^2(x)\,w(x)\,dx$$

para algún $\eta \in (a,b)$.

Propiedad ①: Los coeficientes A_i de la regla de cuadratura Gaussiana son todos positivos.

Propiedad 2 $\quad Q_m(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(x)\,w(x)\,dx$ solo con continuidad.

Reglas compuestas

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,dx$$

$$I_j(f) = \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,dx \sim Q_j(f)$$

fórmulas compuesta $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} Q_j(f)$

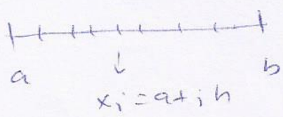
error $\displaystyle R(f) = \sum_{j=0}^{n-1} \left(I_j(f) - Q_j(f)\right)$

Lema. $g \in C[a,b]$ $\{a_0, \dots, a_k\}$ constante con el mismo signo $\{t_0, \dots, t_k\} \in [a,b] \Rightarrow$

$$\sum_{j=0}^{k} a_j g(t_j) = g(\eta) \sum_{j=0}^{k} a_j \quad \text{para algún } \eta \in [a,b]$$

Aplicación: trapecios compuesto. $x_i = a + i\,h$

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f \sim T_j(f) = \frac{h}{2}\left(f(x_j) + f(x_{j+1})\right)$$



$h = \dfrac{b-a}{n}$

$n = \dfrac{b-a}{h}$

$$\sum_{j=0}^{n-1} I_j(f) - T_j(f) = -\sum_{j=0}^{n-1} \frac{f''(\eta_j)}{12} h^3$$

$$= -\frac{f''(\eta)}{12} \sum_{j=0}^{n-1} h^3 = -\frac{f''(\eta)}{12} h^3 n = -\frac{f''(\eta)}{12} h^3 \frac{b-a}{h}$$

$$= -\frac{f''(\eta)}{12} h^2 (b-a)$$

$$T(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \right) h$$

$$= \frac{h}{2} \left[f(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} 2 f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$$R(f) = -\frac{h^2}{12} f''(\eta)(b-a)$$

Simpson composta Uso $h = \left(\frac{b-a}{2n} \right)$

$$x_i = a + i\frac{(b-a)}{n}$$

$$S(f) = \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{n-1} \left[f(x_i) + 4 f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(x_{i+1}) \right]$$

$$= \frac{h}{3} \left[f(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} 2 f(x_i) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(x_n) \right]$$

$$R(f) = -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{IV}(\eta_i)}{90} h^5 = -\frac{f^{IV}(\eta)}{90} \sum_{i=0}^{n-1} h^5$$

$$= -\frac{f^{IV}(\eta)}{90} n h^5$$

$$= -\frac{f^{IV}(\eta)}{90} \frac{b-a}{2h} h^5$$

$$= -\frac{f^{IV}(\eta)}{180} h^4 (b-a)$$