Práctica 8: Teorema de Radon-Nikodym

Ejercicio 1. Sea μ la medida de contar en $\mathbb{R}$ y sea m la medida de Lebesgue. Probar que $m \ll \mu$ pero no existe f tal que

$$m(E) = \int_E f \, d\mu.$$

¿Por qué esto no contradice el Teorema de Radon-Nikodym?

Ejercicio 2.

(a) Sean λ y μ medidas no negativas sobre $(\Omega, \mathcal{M})$ y $\lambda(\Omega) < \infty$. Probar:

$$\lambda \ll \mu \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \ \mu(E) < \delta \ \Rightarrow \ \lambda(E) < \epsilon.$$

(b) Demostrar que la hipótesis $\lambda(\Omega) < \infty$ es necesaria en (a). (Sug. Considerar μ la medida de Lebesgue en $(0,1)$ y $\lambda(E) = \int_E \frac{dt}{t}$ para todo $E \subseteq (0,1)$ medible Lebesgue.)

Ejercicio 3. En $\mathbb{R}^n$ consideramos una medida de Borel compleja λ absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue m. Probar que la derivada de Radon-Nikodym de λ con respectoa m se puede calcular como

$$\frac{d\lambda}{dm}(x) = \lim_{r \to 0} \frac{\lambda(B(x,r))}{m(B(x,r))}$$

para casi todo x con respecto a la medida de Lebesgue.

Ejercicio 4. Sea μ una medida con signo definida en la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \mu(-\infty, x]$. Probar:

(a) Probar que f es de variación acotada y continua por la derecha. Sugerencia: en el caso en que μ es no negativa, f es creciente.

(b) $\mu \ll m$ si y solo si f es absolutamente continua y en ese caso $\frac{d\mu}{dm} = f'$.

(c) $\mu \perp m$ si y solo si $f' = 0$ en casi todo punto respecto de m.

Ejercicio 5. Sea $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida finita y F un subconjunto cerrado del plano complejo $\mathbb{C}$ y $g \in L^1(\mu)$ tal que si $\mu(E) > 0$ entonces:

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E g(x) \, d\mu \in F$$

entonces $g(x) \in F$ para casi todo x respecto de μ.

Ejercicio 6. Sean $(X, \mathcal{A}, \nu)$ un espacio de medida con signo y $A, B \in \mathcal{A}$ respectivamente un conjunto positivo y negativo para ν tales que: $X = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$. Dado $E \in \mathcal{A}$ demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) $\nu^+(E) = \nu(E \cap A) = \sup\{\nu(H) : H \subseteq E, H \in \mathcal{A}\}$,

(b) $-\nu^-(E) = \nu(E \cap B) = \text{ínf}\{\nu(H) : H \subseteq E, H \in \mathcal{A}\}$.

Ejercicio 7. Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida, f una función $\mu-$integrable y ν la medida sobre $(X, \mathcal{A})$ definida para cada $E \in \mathcal{A}$ por la fórmula

$$\nu(E) = \int_E f(x) d\mu(x).$$

Dado $E \in \mathcal{A}$ demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) $\nu^+(E) = \int_E f^+(x) d\mu(x)$,

(b) $\nu^-(E) = \int_E f^-(x) d\mu(x)$.

Ejercicio 8. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $X = \sum_{n=1}^k a_n A_n$ una variable aleatoria simple, donde los números reales a_n son todos distintos, los conjuntos A_n son disjuntos dos a dos y $\Omega = \cup_{n=1}^k A_n$. Sea $\mathcal{U}(X) = \{X^{-1}(B) \colon B \text{ boleriano } \}$ la $\sigma-$álgebra generada por X.

(a) Describir precisamente los conjuntos que componen $\mathcal{U}(X)$.

(b) Probar que si una variable aleatoria Y es $\mathcal{U}(X)-$medible, entonces Y es constante en cada uno de los conjuntos A_n.

(c) Mostrar que entonces Y puede ser escrita en función de X.

Ejercicio 9.

(a) Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sea $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{A}-$medible. Consideramos la medida μ_X en los borelianos de $\mathbb{R}$ definida por $\mu_X(A) = \mu(X^{-1}(A))$. Probar que para toda función $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μ_X-integrable, vale que

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu_X = \int_\Omega f(X) d\mu.$$

(b) Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $X \colon \Omega \to \mathbb{R}_{>0}$ una función $\mathcal{A}-$medible con $\int_\Omega f dP = 1$. Definimos una medida ν sobre $(\Omega, \mathcal{A})$ por

$$\nu(A) = \int_A f dP.$$

Probar que $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ es una espacio de probabilidad y que para toda $g \colon \Omega \to \mathbb{R}$ $\nu-$integrable vale que

$$\int_\Omega g d\nu = \int_\Omega g f dP.$$

(c) En particular, sea $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria y sea f la función densidad de X. Sea $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y supongamos que $Y = g(X)$ es integrable. Probar que

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}} g f.$$