Práctica 7 - Diferenciación

Definición.

- $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : f \in L^1(K) \text{ para todo } K \subseteq \mathbb{R}^n \text{ compacto}\}$.
- Dada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ se definen las funciones maximales de Hardy-Littlewood como

  i. $M^Q f(x) = \sup\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q |f| : Q \text{ es un cubo que contiene a } x\right\}$.

  ii. $M^{QC} f(x) = \sup\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q |f| : Q \text{ es un cubo centrado en } x\right\}$.

  iii. $M^B f(x) = \sup\left\{\frac{1}{|B|}\int_B |f| : B \text{ es una bola que contiene a } x\right\}$.

  iv. $M^{BC} f(x) = \sup\left\{\frac{1}{|B|}\int_B |f| : B \text{ es una bola que centrada en } x\right\}$.

Ejercicio 1. Probar que todas las funciones maximales de Hardy-Littlewood definidas arriba son equivalentes, i.e: para cualquier par de maximales consideradas $M_f^{(i)}$ y $M_f^{(j)}$ existen constantes $C_1, C_2 > 0$ que dependen únicamente de la dimensión n tales que para toda $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ se verifica

$$C_1 M^{(i)} f \leq M^{(j)} f \leq C_2 M_f^{(i)}.$$

En lo sucesivo, cuando escribamos Mf suprimiendo el supraíndice en la notación nos estaremos refiriendo a cualquiera de las cuatro posibilidades.

Ejercicio 2.

(a) Mostrar que si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq \infty$ entonces $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

(b) Probar que si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ entonces Mf es semicontinua inferiormente.

Ejercicio 3.

(a) Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible de diámetro finito. Probar que existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que para $\|x\|$ suficientemente grande vale

$$C_1 |E| \|x\|^{-n} \leq M\chi_E(x) \leq C_2 |E| \|x\|^{-n}.$$

(b) Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ no nula. Probar que existe $C > 0$ tal que si $\|x\| \geq 1$ entonces vale

$$Mf(x) \geq C\|x\|^{-n}.$$

Deducir que $Mf \notin L^1(\mathbb{R}^n)$ a menos que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ se anule en casi todo punto.

(c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por la fórmula $f(x) =: \frac{1}{|x| \log^2(|x|^{-1})}\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x)$. Mostrar que f es integrable pero que $Mf \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Ejercicio 4. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq +\infty$.

(a) Probar que si $1 \leq p < \infty$ entonces existe una constante $C > 0$ que no depende de f tal que para todo $\alpha > 0$

$$|\{Mf > \alpha\}| \leq \frac{C}{\alpha} \int_{\{|f| \geq \frac{\alpha}{2}\}} |f(x)|dx.$$

Sugerencia. Considerar $g = f\chi_{\{|f| \geq \frac{\alpha}{2}\}}$ y usar que $|f| \leq |g| + \frac{\alpha}{2}$.

(b) Probar que si $1 < p \leq \infty$ entonces $Mf \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y además existe una constante $C_p > 0$ que no depende de f tal que

$$\|Mf\|_p \leq C_p \|f\|_p.$$

Ejercicio 5. Dada una familia $\mathcal{S} = (S_i)_{i \in I}$ de conjuntos medibles acotados de $\mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$ decimos que $\mathcal{S}$ se *contrae regularmente a* x si verifica

(i) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $S_i \in \mathcal{S}$ con $|S_i| < \varepsilon$.

(ii) Existe una constante $k > 0$ tal que para todo $S_i \in \mathcal{S}$ vale que $|Q_i| \leq k|S_i|$, donde Q_i denota el cubo más pequeño con centro en x que contiene a S_i.

Notar que los conjuntos S_i no necesitan contener a x.

(a) Probar que las siguientes familias se contraen regularmente a x:

- $\mathcal{S}^Q = \{Q : Q \text{ cubo que contiene a } x\}$
- $\mathcal{S}^B = \{B : B \text{ bola que contiene a } x\}$
- $\mathcal{S}^{BC} = \{B(x,r) : r > 0\}$.

(b) Probar que si $\mathcal{S}$ es una familia que se contrae regularmente a x entonces existe una constante $C > 0$ tal que

$$\sup_{S_i \in \mathcal{S}} \frac{1}{|S_i|} \int_{S_i} |f(y)|dy \leq C M^{QC} f(x).$$

(c) Probar que si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ entonces para todo punto de Lebesgue x de f se tiene

$$\lim_{|S_i| \to 0} \frac{1}{|S_i|} \int_{S_i} |f(y) - f(x)|dy = 0$$

para toda familia $\mathcal{S}$ que se contraiga regularmente a x.

Ejercicio 6. Sea $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ medible y acotada tal que $\operatorname{sop}(\phi) \subseteq B(0,1)$ y $\|\phi\|_1 = 1$. Para cada $\varepsilon > 0$ definamos $\phi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\phi(\frac{x}{\varepsilon})$. Probar que para toda $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (f * \phi_\varepsilon)(x) = f(x)$$

en todo punto de Lebesgue x de f.

Ejercicio 7. Sea $K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función medible, acotada y de soporte compacto. Probar que existe una constante $C > 0$ tal que para toda función $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\sup_{\varepsilon>0} |f * K_\varepsilon(x)| \leq CMf(x),$$

donde $K_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}K(\frac{x}{\varepsilon})$.

Ejercicio 8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por la fórmula

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x\sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0. \end{cases}$$

Calcular los cuatro números de Dini f en $x_0 = 0$.

Ejercicio 9. Hallar $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ creciente, continua y tal que

$$\int_0^1 f'(x)dx < f(1) - f(0).$$

Ejercicio 10. Sea $g : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estrictamente creciente y absolutamente continua. Notemos además $c := g(a)$ y $d := g(b)$.

(a) Probar que si $G \subseteq [c,d]$ es abierto entonces $|G| = \int_{g^{-1}(G)} g'(x)dx$.

(b) Sea $H = \{x : g'(x) \neq 0\}$. Mostrar que si $E \subseteq [c,d]$ y $|E| = 0$ entonces $g^{-1}(E) \cap H$ tiene medida nula.

(c) Probar que si $E \subseteq [c,d]$ es medible entonces $F = g^{-1}(E) \cap H$ es medible y además se tiene

$$|E| = \int_F g' = \int_a^b \chi_E(g(x))g'(x)dx.$$

(d) Probar que si f es medible y no negativa sobre $[c,d]$ entonces $(f \circ g)g'$ es medible sobre $[a,b]$ y vale

$$\int_c^d f(y)dy = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx.$$

Ejercicio 11. Sean $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ absolutamente continua y g integrable sobre $[a,b]$. Probar que

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b G(x)F'(x)dx$$

donde

$$G(x) = G(a) + \int_a^x g(t)dt.$$

Ejercicio 12. Probar que si f es de variación acotada en $[a,b]$ entonces f se puede escribir como $f = g + h$ donde g es absolutamente continua y h es singular. Mostrar además que g y h son únicas salvo constantes aditivas.

Ejercicio 13. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones monótonas crecientes definidas en un intervalo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ tales que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ es convergente para todo $x \in [a,b]$. Probar que si definimos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ por la fórmula

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

entonces para casi todo $x \in [a,b]$ la función f es derivable en x y se tiene la igualdad

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Ejercicio 14. Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada y $V : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $V(x) := V_a^x(f)$. Nuestro objetivo es mostrar que $V' = |f'|$ en casi todo punto. Para eso se propone el siguiente plan:

(a) Dada una partición $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ mostrar que existe $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que

- $g(a) = 0$
- Para cada $0 \le j \le n-1$ vale $g(x_{j+1}) - g(x_j) = |f(x_{j+1}) - f(x_j)|$
- Para cada $0 \le j \le n-1$ existe una constante $c_j \in \mathbb{R}$ tal que

$$g|_{[x_j,x_{j+1}]} = f|_{[x_j,x_{j+1}]} + c_j \text{ ó } g|_{[x_j,x_{j+1}]} = -f|_{[x_j,x_{j+1}]} + c_j.$$

(b) Probar que toda función g como en (a) verifica que

- $|g'| = |f'|$ a.e.
- $g(b) = \sum_{j=1}^{n-1} |f(x_{j+1}) - f(x_j)|$
- $V - g$ es monótona creciente.

(c) Elegir una sucesión de funciones g_k como en (a) tales que $\sum_{k\in\mathbb{N}} V(x) - g_k(x) < +\infty$ para casi todo x y aplicar el ejercicio anterior.

Ejercicio 15. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada. Sea $V : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $V(x) := V_a^x(f)$. Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) f es continua si y sólo si V lo es.

(b) f es absolutamente continua si y sólo si V lo es. Además, en tal caso vale que

$$V(x) = \int_a^x \left|f'(y)\right| dy, \text{ para todo } x \in [a,b].$$

(c) $\displaystyle\int_a^b \left|f'(x)\right| dx \le V_a^b(f)$ y la igualdad vale si y sólo si f es absolutamente continua.

Ejercicio 16. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función absolutamente continua.

(a) Probar que si $N \subseteq [a,b]$ tiene medida nula entonces $f(N)$ tiene medida nula.

(b) Concluir que la imagen por f de un conjunto medible es un conjunto medible.