Práctica 3 - Funciones medibles

Ejercicio 1. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ medibles. Mostrar que los conjuntos $\{f > g\}$ y $\{f = g\}$ son medibles.

Ejercicio 2.

(a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = \alpha\}$ es medible. ¿Es f medible?

(b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $|f|$ es medible. ¿Es f medible?

Ejercicio 3. Sea $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Probar que

(a) Si f es medible entonces $f^{-1}(B)$ es medible para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. ¿Vale la recíproca?

(b) Si $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) := \{B \cup C : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ y } C \subseteq \{-\infty, \infty\}\}$ entonces f es medible si y sólo si $f^{-1}(E)$ es medible para todo $E \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

Ejercicio 4. Probar que toda función semicontinua (inferior o superiormente) es medible Borel.

Ejercicio 5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función.

(a) Probar que si f es monótona entonces f es medible Borel.

(b) Probar que si f es derivable sobre $\mathbb{R}$ entonces f' es medible Borel.

Ejercicio 6. Probar que si $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función medible entonces existe $g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ medible Borel tal que $f = g$ en casi todo punto.

Ejercicio 7. Probar que si $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es continua en casi todo punto entonces es medible.

Ejercicio 8.

(a) Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en casi todo punto tal que no exista $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua que verifique $f = g$ en casi todo punto.

(b) Hallar $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que g sea continua, f coincida con g en casi todo punto y f sea discontinua en todo punto.

Ejercicio 9. Sean I un intervalo de $\mathbb{R}^n$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función medible. Probar que dados $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ existe $g : I \to \mathbb{R}$ continua tal que

$$|\{x \in I : |g(x) - f(x)| \geq \delta\}| < \varepsilon.$$

Sugerencia. Mostrar primero que dada una función simple $\varphi : I \to \mathbb{R}$ para cada $\varepsilon > 0$ existe $g_\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ continua tal que

$$|\{x \in I : g_\varepsilon(x) \neq \varphi(x)\}| < \varepsilon.$$

Ejercicio 10. Sea f la función de Cantor-Lebesgue y $g : [0,1] \to [0,2]$ definida por

$$g(x) = f(x) + x.$$

(a) Probar que g es continua y biyectiva con inversa g^{-1} continua.

(b) Probar que $|g(C)| = 1$ donde C denota al conjunto de Cantor.

(c) Mostrar que existe un conjunto medible $E \subseteq [0,1]$ tal que $g(E)$ no es medible. ¿Contradice esto la medibilidad de g^{-1}?

(d) Mostrar que existe un conjunto medible que no es boreliano.

(e) Hallar h_1 medible Borel y h_2 medible tal que $h_2 \circ h_1$ no es medible.

Ejercicio 11. Sea E un conjunto medible y $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles definidas sobre E tal que para todo $x \in E$ existe $M_x > 0$ tal que $\sup_{k\in\mathbb{N}} |f_k(x)| \leq M_x$. Probar que si para cada $\alpha > 0$ existe $k_\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $|\{x \in E : |f_k(x)| < \alpha\}| \leq \frac{\alpha}{k}$ para todo $k \geq k_\alpha$ entonces E tiene medida nula.

Ejercicio 12. Sea E medible de medida finita y $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles definidas sobre E tal que para todo $x \in E$ existe $M_x > 0$ tal que $\sup_{k\in\mathbb{N}} |f_k(x)| \leq M_x$. Probar que dado $\varepsilon > 0$ existen $F_\varepsilon \subseteq E$ cerrado y $M_\varepsilon > 0$ tales que

$$|E - F_\varepsilon| < \varepsilon \quad \text{y} \quad \sup_{x\in F_\varepsilon}\left[\sup_{k\in\mathbb{N}} |f_k(x)|\right] \leq M_\varepsilon.$$

Ejercicio 13. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = n\chi_{[1/n,2/n]}(x)$. Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) La sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente.

(b) Para cada $\delta > 0$ la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre $[\delta, \infty)$.

(c) No existe $E \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ de medida nula tal que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja uniformemente sobre E^c.

Ejercicio 14. Sean E un conjunto medible y $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles definidas sobre E y finitas c.t.p. tales que convergen c.t.p. a una cierta $f : E \to \mathbb{R}$ medible. Probar que existe una sucesión $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos medibles de E que verifica

(i) $|E - \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i| = 0$

(ii) La sucesión $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f sobre cada E_i.

Ejercicio 15. Sean E un conjunto medible y $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles definidas sobre E y finitas en casi todo punto. Consideremos además una sucesión $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos medibles de E tal que

$$\lim_{k\to+\infty} |E - E_k| = 0.$$

Probar que si $f : E \to \mathbb{R}$ es tal que $\chi_{E_k} f_k \overset{m}{\to} f$ entonces $f_k \overset{m}{\to} f$.

Ejercicio 16. Sean E un conjunto medible y $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}, (g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sucesiones de funciones medibles definidas sobre E y finitas en casi todo punto. Supongamos que $f_k \overset{m}{\to} f$ y $g_k \overset{m}{\to} g$ sobre E.

(a) Probar que $f_k + g_k \overset{m}{\to} f + g$ sobre E.

(b) Probar que si E tiene medida finita entonces $f_k g_k \overset{m}{\to} fg$ sobre E.

(c) Mostrar que la hipótesis de medida finita en el ítem anterior no puede retirarse.

(d) Probar que si E tiene medida finita y g es no nula en casi todo punto entonces $\frac{f_k}{g_k} \overset{m}{\to} \frac{f}{g}$.