Práctica 2: Medida en Espacios Abstractos

Ejercicio 1. Sea X un conjunto no vacío.

(a) Para cada $E \subset X$, definimos $\mu(E) = \text{card}(E)$ si E es finito y $\mu(E) = \infty$ si E es infinito. Probar que μ es una medida definida en $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$. Esta medida se suele llamar medida de contar (*counting measure* en inglés).

(b) Dado $x_0 \in X$,para cada $E \subset X$, definimos $\delta_{x_0}(E) = \chi_E(x_0)$. Probar que δ es una medida en $\mathcal{P}(X)$. Esta medida se denomina delta de Dirac (concentrada en x_0).

(c) Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y sea $A \in \mathcal{M}$. Para cada $E \in \mathcal{M}$ definimos $\mu_A(E) = \mu(A \cap E)$. Probar que μ_A es una medida en $\mathcal{M}$.

(d) Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible. Sean $\mu_1, \dots, \mu_n$ medidas definidas en ese espacio y sean $a_1, \dots, a_n$ constantes positivas. Probar que

$$\mu = a_1\mu_1 + \cdots + a_n\mu_n$$

es una medida.

Ejercicio 2. Sea $X = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto infinito numerable. Supongamos que $(w_n)_{\in\mathbb{N}}$ es una sucesión, con $w_n \in [0, +\infty]$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Tomemos $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ y para cada $E \subset X$ definamos

$$\mu(E) = \sum_{x_n \in E} w_n$$

Probar que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ resulta un espacio de medida. Recíprocamente, verificar que toda medida en el espacio medible $(X, \mathcal{M})$ es de esta forma.

Ejercicio 3. Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones en un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$.

(a) Si $(E_j)_{j\geq 1} \subset \mathcal{M}$ entonces $\mu(\liminf E_j) \leq \liminf \mu(E_j)$

(b) Si $(E_j)_{j\geq 1} \subset \mathcal{M}$ entonces $\mu(\limsup E_j) \geq \limsup \mu(E_j)$

Ejercicio 4. Si $(X, \mathcal{M}_X, \mu)$ un espacio de medida es un espacio de medida, y $T : X \to Y$ es una función, podemos usar T para definir una medida en Y de la siguiente manera:

$$\mathcal{M}_Y = \{E \subset Y : T^{-1}(E) \in \mathcal{M}_X\}$$

$$\nu(E) = \mu(T^{-1}(E)) \quad \text{para } E \in \mathcal{M}_Y$$

Probar que $(Y, \mathcal{M}_Y, \nu)$ resulta un espacio de medida. $\nu = T\#\mu$ se denomina la medida empujada hacia adelante de μ por T (en inglés *push-forward*), y a los conjuntos de $\mathcal{M}_Y$

los llamamos medibles respecto a ν. Esta construcción es muy útil para definir medidas en otros espacios a partir de la Lebesgue en $\mathbb{R}^d$ como los siguientes ejemplos muestran.

Ejercicio 5. (medida de Lebesgue en el círculo) Consideramos el círculo unitario $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ en el plano complejo (utilizamos la notación compleja por comodidad). Definimos la función $T : [0, 2\pi) \to S^1$ por

$$T(\theta) = e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

Sea m la medida de Lesbesgue en $[0, 2\pi)$ y $\nu = T\#m$. μ resulta una medida sobre el espacio S^1, que satisface la propiedad de invariancia por rotaciones:

$$\nu(\alpha \cdot E) = \nu(E) \quad (E \subset S^1 \text{ medible respecto a } \nu, \alpha \in S^1)$$

Ejercicio 6. Similarmente, para definir una medida ν en el espacio de sucesiones de ceros y unos

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n = 0 \text{ ó } x_n = 1 \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}$$

consideramos la función $T : [0, 1) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, que a cada $x \in [0, 1]$ le asigna la secuencia de dígitos (x_n) en su desarrollo en base 2:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$$

(Si x admite dos desarrollos, para obtener una función, elegimos aquel en que $x_n = 0$ para $n \geq n_0$). Entonces definimos $\nu = T\#m$ donde m es la medida de Lebesgue en $[0, 1)$.

(a) Si consideramos

$$A = \{(x_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : x_{k_1} = d_1, x_{k_2} = d_2, \ldots x_{k_j} = d_j\}$$

(donde d_i es 0 o 1 para cada i y los k_i son distintos), probar que $\nu(A) = \frac{1}{2^j}$.

(b) Probar que $\nu(B_{n_0}) = 0$ siendo B_{n_0} el conjunto

$$B_{n_0} = \{(x_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : x_n = 0 \text{ para } n \geq n_0\}$$

(c) ¿Cuál es la medida $\nu(C)$ del conjunto

$$C = \{(x_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : x_n = 0 \text{ para infinitos } n\}\,?$$

(d) ¿Cuál es la interpretación probabilística de este ejemplo?

Ejercicio 7. Sean $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible. Sea la función de conjuntos $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisface:

1. $A, B \in \mathcal{M} \;\wedge\; A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$
2. $A_n \in \mathcal{M}\ (n \in \mathbb{N}) \;\wedge\; A_n \searrow \emptyset \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

Probar que μ es una medida.

Ejercicio 8. Un espacio $(X, \mathcal{M}, \mu)$ se dice de medida completa si dado $Z \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(Z) = 0$, para cada $Y \subseteq Z$ resulta que $Y \in \mathcal{M}$. En este caso, probar que:

(a) Si $Z_1 \in \mathcal{M}$, $Z_1 \Delta Z_2 \in \mathcal{M}$ y $\mu(Z_1 \Delta Z_2) = 0$, entonces $Z_2 \in \mathcal{M}$.

(b) Si $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$ y $\mu(E_1 \vartriangle E_2) = 0$ entonces $\mu(E_1) = \mu(E_2)$.

Ejercicio 9. (completación de una medida) Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Sea

$$\overline{\mathcal{M}} = \{A \subseteq X \,:\, A = E \cup M\,;\, E \in \mathcal{M}, M \subseteq N \in \mathcal{M}\,, \mu(N) = 0\}$$

Sobre $\overline{\mathcal{M}}$ se define $\overline{\mu}(A) = \mu(E)$, si $A = E \cup M$, como en la definición de $\overline{\mathcal{M}}$. Probar:

(a) $\overline{\mathcal{M}}$ es una σ-álgebra.

(b) $\overline{\mu}$ está bien definida sobre $\overline{\mathcal{M}}$.

(c) $(X, \overline{\mathcal{M}}, \overline{\mu})$ es un espacio de medida completa.