

PRÁCTICA 0 - PRELIMINARES: CONJUNTOS Y FUNCIONES

Ejercicio 1. Sean $(X_i)_{i \in I}$ y $(Y_j)_{j \in J}$ dos familias de conjuntos. Demostrar las siguientes afirmaciones:

$$(a) \left(\bigcap_{i \in I} X_i \right) \cup \left(\bigcap_{j \in J} Y_j \right) = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} (X_i \cup Y_j)$$

$$(b) \left(\bigcup_{i \in I} X_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} Y_j \right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (X_i \cap Y_j)$$

$$(c) \left(\bigcap_{i \in I} X_i \right) \times \left(\bigcap_{j \in J} Y_j \right) = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} (X_i \times Y_j)$$

$$(d) \left(\bigcup_{i \in I} X_i \right) \times \left(\bigcup_{j \in J} Y_j \right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (X_i \times Y_j)$$

(e) Si $I = J$ y para todo $i \in I$ se tiene $Y_i \subseteq X_i$ entonces

$$\left(\bigcup_{i \in I} Y_i \right) \subseteq \left(\bigcup_{i \in I} X_i \right) \text{ y } \left(\bigcap_{i \in I} Y_i \right) \subseteq \left(\bigcap_{i \in I} X_i \right)$$

(f) Si $A \subseteq I$ entonces

$$\left(\bigcup_{i \in A} X_i \right) \subseteq \left(\bigcup_{i \in I} X_i \right) \text{ y } \left(\bigcap_{i \in I} X_i \right) \subseteq \left(\bigcap_{i \in A} X_i \right)$$

(g) Para cada conjunto F se tiene

$$F - \bigcup_{i \in I} X_i = \bigcap_{i \in I} (F - X_i) \text{ y } F - \bigcap_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} (F - X_i)$$

Ejercicio 2.

(a) Sea $(A_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos indexada en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Probar que

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{n,k} \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{n,k}$$

(b) Encontrar una familia de conjuntos $(A_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{n,k} \neq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{n,k}$$

Ejercicio 3. Sean $(J_l)_{l \in L}$ y $(X_i)_{i \in I}$ dos familias de conjuntos que satisfacen $\bigcup_{l \in L} J_l = I$.

Probar las siguientes afirmaciones:

$$(a) \bigcup_{i \in I} X_i = \bigcup_{l \in L} \left(\bigcup_{i \in J_l} X_i \right)$$

$$(b) \bigcap_{i \in I} X_i = \bigcap_{l \in L} \left(\bigcap_{i \in J_l} X_i \right)$$

Ejercicio 4. Probar que si A y B son conjuntos tales que $A \times B = (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2)$ con $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = \emptyset$, $A_1 \times B_1 \neq \emptyset$ y $A_2 \times B_2 \neq \emptyset$ entonces vale que

$$(A = A_1 = A_2 \text{ y } B = B_1 \cup B_2) \text{ ó } (A = A_1 \cup A_2 \text{ y } B_1 = B_2 = B)$$

Ejercicio 5. Sea $f : E \rightarrow F$ una función y consideremos dos pares de subconjuntos $A, B \subseteq E$ y $C, D \subseteq F$. Probar las siguientes afirmaciones:

$$(a) A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$$

$$(b) f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$(c) f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

$$(d) \text{ Si } f \text{ es inyectiva entonces } f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

$$(e) A \subseteq f^{-1}(f(A)) \text{ y } f(f^{-1}(D)) \subseteq D$$

$$(f) \text{ Si } f \text{ es inyectiva entonces } f(E - A) \subseteq F - f(A)$$

$$(g) \text{ Si } f \text{ es suryectiva entonces } f(E - A) \supseteq F - f(A)$$

$$(h) f^{-1}(F - D) = E - f^{-1}(D)$$

Ejercicio 6. Sea $f : E \rightarrow F$ una función y consideremos dos familias $(X_i)_{i \in I}$ y $(Y_j)_{j \in J}$ de subconjuntos de E y F , respectivamente. Probar las siguientes afirmaciones:

$$(a) f\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(X_i)$$

$$(b) f\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(X_i)$$

$$(c) \text{ Si } f \text{ es inyectiva entonces } f\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) = \bigcap_{i \in I} f(X_i)$$

$$(d) f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} Y_j\right) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(Y_j)$$

$$(e) f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} Y_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(Y_j)$$

Ejercicio 7. Dada una sucesión $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de E definimos el *límite inferior* y el *límite superior* de $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} E_n := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} E_k$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} E_k$$

Probar las siguientes afirmaciones:

- (a) $E - \liminf_{n \rightarrow \infty} E_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} (E - E_n)$
- (b) $E - \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} (E - E_n)$
- (c) $\liminf_{n \rightarrow \infty} E_n \subseteq \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n$

Cuando los límites inferior y superior de la sucesión $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ coinciden decimos que existe el límite de $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y, en tal caso, denotamos a ambos conjuntos simplemente por $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n$.

- (d) Demostrar que si $E_{n+1} \subseteq E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$.
- (e) Demostrar que si $E_n \subseteq E_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$.
- (f) Probar que si definimos la sucesión $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de E por la fórmula recursiva

$$\begin{cases} D_1 = \emptyset \\ D_{n+1} = D_n \triangle E_n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

entonces existe el límite de $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si y sólo si $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \emptyset$.

Ejercicio 8. Sea X un conjunto. Para cada subconjunto $A \subseteq X$ se define la función $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ denominada *función característica de A* por la fórmula

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

Probar las siguientes afirmaciones:

- (a) $A \subseteq B \Leftrightarrow \chi_A(x) \leq \chi_B(x)$ para todo $x \in X$
- (b) $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$ para todo $x \in X$
- (c) $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A \cap B}(x)$ para todo $x \in X$

Ejercicio 9. Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X y $f : X \rightarrow Y$ una función. Demostrar las siguientes afirmaciones:

- (a) $f(\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n) \subseteq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(X_n)$
- (b) $f(\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n) \subseteq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(X_n)$
- (c) $f(\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n) \subseteq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(X_n)$
- (d) Si f es inyectiva entonces en (a) y (b) vale la igualdad.

Ejercicio 10. (El conjunto ternario de Cantor) Consideramos las transformaciones afines $T_1, T_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$

$$T_1(x) = \frac{1}{3}x, \quad T_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

Definimos una sucesión de conjuntos $F_n \subset [0, 1]$ por inducción

$$F_0 = [0, 1], \quad F_n = T_1(F_{n-1}) \cup T_2(F_{n-1}) \quad (n \geq 1)$$

y definimos el *conjunto ternario de Cantor* como

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

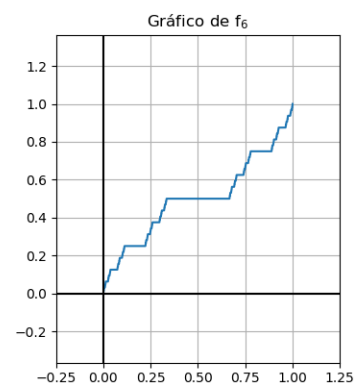
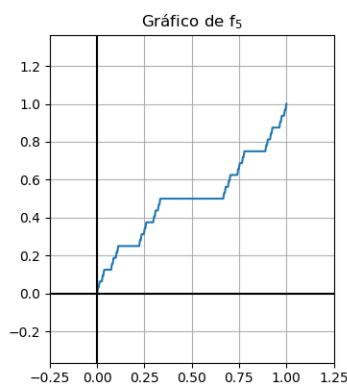
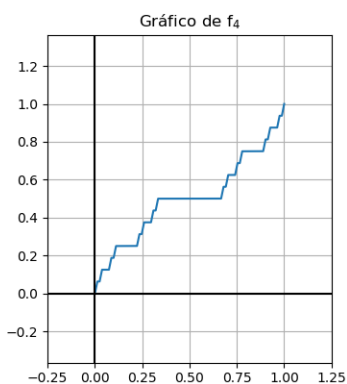
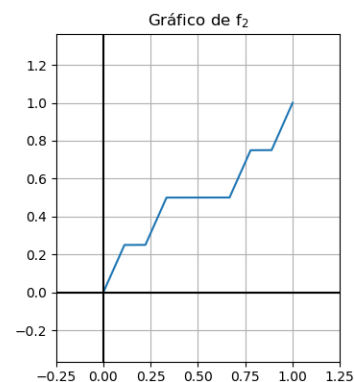
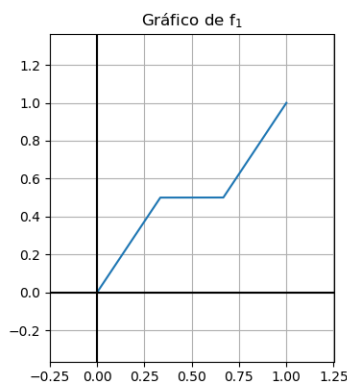
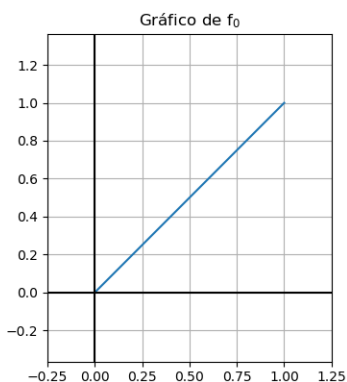
- (a) Describir geoméricamente cómo es F_n .
- (b) Probar que C es un compacto, y $C = T_1(C) \cup T_2(C)$ (Esta última propiedad suele expresarse diciendo que C es *auto-similar*).
- (c) Probar que para cada $\varepsilon > 0$ es posible cubrir a C con finitos intervalos tales que sus longitudes suman menos que ε .
- (d) Probar que un número real $x \in [0, 1]$ pertenece a C si y sólo si admite un desarrollo en base 3 de la forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{3^n} \text{ donde } d_n = 0 \text{ o } d_n = 2 \text{ para cada } n$$

- (e) Probar que C tiene cardinal c (el cardinal de \mathbb{R}).

Ejercicio 11. (La función de Cantor-Lebesgue) Similarmente definimos inductivamente una sucesión de funciones $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera

$$f_0(x) = x \text{ para todo } x \in [0, 1]$$



$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}f_{n-1}(3x) & \text{si } x \in [0, 1/3) \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in [1/3, 2/3] \\ \frac{1}{2}f_{n-1}(3x - 2) + \frac{1}{2} & \text{si } x \in (2/3, 1] \end{cases} \quad \text{para todo } n \geq 1$$

Demostrar las siguientes afirmaciones:

- (a) $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$ y f_n es continua y monótona creciente para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (b) $|f_n(x) - f_{n-1}(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (c) f_n converge uniformemente en $[0, 1]$ hacia una función continua $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que llamamos la *función de Cantor-Lebesgue*.
- (d) f es monótona creciente, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.
- (e) f es constante en cada componente conexa del complemento del ternario de Cantor (¿Cómo es geoméricamente este conjunto?)