Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2019

Práctica 7

El Teorema de Hille-Yosida

No intentes ser el mejor del equipo, intenta que tu equipo sea el mejor

Primeros ejercicios

1. Sea $A \in \mathcal{L}(X)$. Probar que $S(t) = e^{tA}$ es un c_0-semigrupo que verifica la propiedad adicional
$$S\colon [0,\infty) \to \mathcal{L}(X) \quad \text{es continuo.} \tag{1}$$

2. Sea $1 < p < \infty$ fijo y $X = L^p(\mathbb{R})$. Para cada $f \in L^p(\mathbb{R})$ definimos
$$S(t)f(x) = f(x+t), \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0.$$
Probar que $S(t)$ es un c_0-semigrupo que no verifica (1).

3. Sea $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ y definimos el operador $A\colon \mathcal{D}(A) \subset \ell^2 \to \ell^2$ dado por
$$Au = (\lambda_1 u_1, \dots, \lambda_n u_n, \dots), \quad \mathcal{D}(A) = \{u = \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2\colon \{\lambda_n u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2\}.$$
   (a) Probar que $\mathcal{D}(A) = \ell^2$ y $A \in \mathcal{L}(\ell^2)$ si y sólo si $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.
   (b) Probar que $(A, \mathcal{D}(A))$ es cerrado y $\mathcal{D}(A)$ es denso en ℓ^2.
   (c) Asumir que $\lambda_n \leq \omega$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Deducir que todo $\lambda > \omega$ pertenece al resolvente de A, $\rho(A)$. Escribir una fórmula explícita para el resolvente $R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}$.
   (d) Por el teorema de Hille-Yosida, A es el generador de un c_0-semigrupo en ℓ^2, que satisface $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\ell^2)} \leq Me^{\omega t}$, $t \geq 0$. Calcular $S(t)$ de forma explícita.

4. Sea $A\colon \mathcal{D}(A) \subset L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$ el generador infinitesimal del c_0-semigrupo del ejercicio 2. Probar que $(A, \mathcal{D}(A))$ se caracteriza como
$$\mathcal{D}(A) = \{f \in L^p(\mathbb{R})\colon f \in AC(\mathbb{R}) \text{ y } f' \in L^p(\mathbb{R})\}, \qquad Af(x) = f'(x)\ \forall f \in \mathcal{D}(A).$$

5. Sea X un espacio de Banach y $S(t)$ un c_0-semigroupo en X que satisface $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$, $t \geq 0$.
Sea $\tilde{S}(t) = e^{-\omega t}S(t)$. Probar que:
   (a) $\tilde{S}(t)$ es también un c_0-semigrupo y $\|\tilde{S}(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$, $t \geq 0$.
   (b) Sean $(A, \mathcal{D}(A))$ y $(\tilde{A}, \mathcal{D}(\tilde{A}))$ los generadores de $S(t)$ y $\tilde{S}(t)$ respectivamente. Probar que $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(\tilde{A})$ y $\tilde{A} = A - \omega I$.

6. Sea $S(t)$ un c_0-semigroupo en X.
   (a) Probar que el mapa $(t, x) \mapsto S(t)x$ es continuo de $[0,\infty) \times X \to X$.
   (b) Sea $\tilde{S}(t)$ otro c_0-semigroupo. Mostrar que $y(t) = S(T-t)\tilde{S}(t)x$ es continuo de $[0, T]$ en X, donde $T > 0$ y $x \in X$ son fijos.
   (c) Suponer que $S(t)$ y $\tilde{S}(t)$ tienen el mismo generador y mostrar que $y'(t) = 0$ para todo $t \in (0, T)$ y $x \in \mathcal{D}(A)$.
   (d) Deducir que $S(t) = \tilde{S}(t)$ para todo $t \geq 0$.

Aplicaciones a las ecuaciones diferenciales

7. El objetivo de este ejercicio es usar el Teorema de Hille-Yosida para resolver las ecuación del calor en dimensión 1. Llamamos $I = (0, 1)$. La ecuación del calor es

$$u_t = u_{xx}, \quad u(0,t) = u(1,t) = 0, \; u(x,0) = f(x), \; x \in I, t > 0. \tag{2}$$

   (a) Definimos el conjunto $H^1(I) = \{u \in AC(I) \colon u' \in L^2(I)\}$. Probar que $u \in H^1(I)$ si y sólo si $u \in L^2(I)$ y existe $v \in L^2(I)$ tal que

$$\int_I u\phi'\,dx = -\int_I v\phi\,dx, \qquad \forall \phi \in C_c^\infty(I).$$

   Observar que en ese caso $v = u'$.

   (b) Se define $H_0^1(I) = \{u \in H^1(I) \colon u(0) = u(1) = 0\}$. Probar que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\int_I u^2\,dx \le C \int_I (u')^2\,dx, \qquad \forall u \in H_0^1(I).$$

   Concluir que $H_0^1(I)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$(u, v)_{H^1} = \int_I u'v'\,dx.$$

   (c) Probar, usando el Teorema de Lax-Milgram, que dado $\lambda > 0$ y dada $f \in L^2(I)$, existe una única $u \in H_0^1(I)$ que verifica

$$\int_I u'v'\,dx + \lambda \int_I uv\,dx = \int_I fv\,dx, \qquad \forall v \in H_0^1(I),$$

   (d) Se define $H^2(I) = \{u \in H^1(I) \colon u' \in H^1(I)\}$. Probar, usando la caracterización del ítem (a), que la función u hallada en el ítem (c) pertenece a $H^2(I) \cap H_0^1(I)$. Concluir que entonces esa función verifica

$$-u'' + \lambda u = f \text{ c.t.p. en } I.$$

   (e) Definimos $\mathcal{D}(A) = H^2(I) \cap H_0^1(I)$ y $A \colon \mathcal{D}(A) \subset L^2(I) \to L^2(I)$ dado por $Au = -u''$. Probar que A es un operador maximal monótono.

   (f) Usar el Teorema de Hille-Yosida para concluir la existencia y unicidad de solución de la ecuación del calor (2) para $f \in L^2(I)$.

8. El objetivo de este ejercicio es usar el Teorema de Hille-Yosida para resolver la ecuación de ondas en dimensión 1. Usamos las notaciones del ejercicio anterior. La ecuación de ondas es

$$u_{tt} = u_{xx}, \; u(0,t) = u(1,t) = 0, \; u(x,0) = f(x), \; u_t(x,0) = g(x) \; x \in I, t > 0. \tag{3}$$

   (a) Probar que, al menos formalmente, la ecuación de ondas (3) es equivalente al sistema

$$\begin{cases} u_t - v = 0, & x \in I, t > 0 \\ v_t - u_{xx} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

(b) Verificar que, formalmente, el sistema (4) se puede escribir como

$$\frac{dU}{dt} + AU = 0, \tag{5}$$

donde

$$AU = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\frac{d^2}{dx^2} & 0 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\frac{d^2}{dx^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ \frac{d^2u}{dx^2} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

(c) Consideremos ahora el espacio de Hilbert $H = H_0^1(I) \times L^2(I)$, equipado con el producto escalar

$$(U_1, U_2)_H = \int_I u_1' u_2'\, dx + \int_I v_1 v_2\, dx,$$

donde $U_i = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}$, $i = 1, 2$. Definimos entonces $A\colon \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ donde A está dado por (6) y $\mathcal{D}(A) = (H^2(I) \cap H_0^1(I)) \times H_0^1(I)$.

Probar que A es un operador maximal monótono.

(d) Concluir, usando el Teorema de Hille-Yosida, la existencia y unicidad de soluciones para la ecuación de ondas (3) para toda $f \in H_0^1(I)$ y $g \in L^2(I)$.

Aplicaciones a los procesos estocásticos

En esta sección notaremos por $(U, \mathrm{dist}(\cdot, \cdot))$ un espacio métrico localmente compacto y separable (típicamente, $U = \mathbb{R}$ en el caso continuo, $U = \mathbb{N}_0$ en el caso discreto y $\mathrm{dist}(x, y) = |x - y|$ en ambos casos). Luego, consideramos el conjunto

$$X = C_0(U) = \{f \in C(U; \mathbb{R})\colon \text{que tienden a 0 en el infinito}\}.$$

Es decir, dado $\varepsilon > 0$, existe un compacto $K \subset U$ tal que $|f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in U \setminus K$.

En X se considera la norma supremo $\|f\| = \sup_{x\in U} |f(x)|$.

9. Probar que $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach y que $C_c(U)$ (las funciones continuas de soporte compacto) es denso en X.

Decimos que $\omega\colon [0, \infty) \to U$ es un CADLAG (del francés *continue à droite, limite à gauche*) si es una función continua a derecha con límite finito a izquierda.

Llamamos $\Omega = \{\omega\colon [0, \infty) \to U\colon \omega \text{ es un CADLAG}\}$.

En Ω se define la $\sigma-$álgebra Σ como la menor $\sigma-$álgebra tal que todas las *proyecciones* $\pi_t\colon \Omega \to U$, $\pi_t(\omega) = \omega(t)$ son medibles $(t \geq 0)$, donde en U se considera la $\sigma-$álgebra de Borel.

Luego, (Ω, Σ) es un espacio medible.

10. Definimos la aplicación $X\colon [0, \infty) \times \Omega \to U$ de la forma $X(t, \omega) = \omega(t)$. Notamos por $X_t(\omega) = X(t, \omega)$. Probar que para cada $t \geq 0$, X_t resulta medible.

Definición 1 *Se define un proceso de Feller a una colección de medidas de probabilidad $\{P^x\}_{x\in U}$ sobre (Ω, Σ) y una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, $\mathcal{F}_t \subset \Sigma$ para todo $t \geq 0$ (i.e. $\mathcal{F}_t$ es $\sigma-$álgebra y $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ si $t \leq s$) respecto de la cual $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es adaptado (i.e. X_t es $\mathcal{F}_t-$medible) tales que*

- $P^x(X_0 = x) = 1$ *(es decir, P^x es una medida concentrada sobre las trayectorias que empiezan en x).*
- *Para cada $f \in X$ y cada $t \geq 0$, la aplicación $\varphi_t^f : U \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi_t^f(x) = E^x(f(X_t))$ es un elemento de X (es decir, las medidas P^x varían* continuamente *al variar $x \in U$).*
- *Para toda variable aleatoria acotada $Y : \Omega \to \mathbb{R}$, se verifica la* propiedad de Markov
$$E^x(Y \circ \theta_s | \mathcal{F}_s) = E^{X_s}(Y) \quad P^x - c.s.,$$
donde $\theta_s(\omega)(t) = \omega(t+s)$.

Definición 2 *Un semigrupo de probabilidad es un c_0-semigrupo $\{T_t\}_{t\geq 0}$ definido sobre X tal que*

- $T_t f \geq 0$ *para toda $f \in X$, $f \geq 0$.*
- *Si U es compacto, entonces $T_t 1 = 1$.*
  Si U no es compacto, entonces existe $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\| < \infty$, tal que $T_t f_n \to 1$ cuando $n \to \infty$ puntualmente, para todo $t \geq 0$.

11. Probar que dado un proceso de Feller, entonces $T_t f(x) = E^x(f(X_t))$ define un semigrupo de probabilidad.

12. Probar que un semigrupo de probabilidad verifica que $\|T_t f\| \leq \|f\|$ para toda $f \in X$. Es decir, un semigrupo de probabilidad es un c_0-semigrupo de contracciones.

Definición 3 *Supongamos que en U tenemos adicionalmente una medida de Borel μ y para cada $t \geq 0$ una función $p_t : U \times U \to \mathbb{R}$ que es $(\mu \times \mu)-$medible. Decimos que $\{p_t\}_{t>0}$ son funciones de transición de probabilidad si*

(a) $p_t(x,y) \geq 0$ *para todo $x, y \in U$, $t \geq 0$.*

(b) Para todo $x \in U$ se tiene que $\int_U p_t(x,y)\, d\mu(y) = 1$.

(c) $\lim_{t\downarrow 0} p_t(x,y) = \delta_x$, *es decir*
$$\lim_{t\downarrow 0} \int_U p_t(x,y) f(y)\, d\mu(y) = f(x) \quad \forall f \in X.$$

(d) $\{p_t\}_{t>0}$ *verifica las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov:*
$$p_{s+t}(x,y) = \int_U p_s(x,z) p_t(z,y)\, d\mu(z), \qquad \forall x, y \in U,\ s, t \geq 0.$$

$p_t(x,y)$ se interpreta como la densidad de probabilidad de que una partícula que está ahora en la posición x, luego de t segundos se encuentre en la posición y.

13. Probar que si $\{p_t\}_{t\geq 0}$ son funciones de transición de probabilidad, entonces $T_t f(x) = \int_U p_t(x,y) f(y)\, d\mu(y)$ define un semigrupo de probabilidad si y sólo si $p_t(\cdot, y) \in X$ para todo $y \in U$, $t \geq 0$.

14. Consideremos $U = \mathbb{R}$ con μ la medida de Lebesgue y para cada $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$ consideramos $p_t(x, y)$ a la función de densidad $N(x, t)$, i.e.

$$p_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}.$$

Probar que $\{p_t\}_{t>0}$ son funciones de transición de probabilidad.

Por el momento, consideraremos los casos en que U es finito o numerable. Es decir $U = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ o $U = \mathbb{N}_0$. En estas situaciones, la medida μ es la medida de contar, i.e. $\mu(A) = \#A$

15. Probar que si U es finito o numerable, entonces la propiedad (c) de la Definición 3 resulta equivalente a

$$\lim_{t \downarrow 0} p_t(x, x) = 1.$$

Definición 4 *Una $Q-$matriz es una aplicación $q \colon U \times U \to \mathbb{R}$ tal que*

$$q(x, y) \geq 0 \text{ si } x \neq y \quad y \quad \sum_{y \in U} q(x, y) = 0.$$

Observemos que si $U = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, entonces $q \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

16. Verificar, formalmente, que si $\{p_t\}_{t \geq 0}$ son funciones de transición de probabilidad, entonces

$$q(x, y) = \frac{d}{dt} p_t(x, y)|_{t=0}$$

es una $Q-$matriz.

Definición 5 *Una matriz de Markov en U es una aplicación $p \colon U \times U \to \mathbb{R}$ tal que*

$$p(x, y) \geq 0 \quad y \quad \sum_{y \in U} p(x, y) = 1.$$

Dada una matriz de Markov se define la transición de probabilidad de $k-$pasos, inductivamente como

$$p_1(x, y) = p(x, y) \quad y \quad p_{k+1}(x, y) = \sum_{z \in U} p_k(x, z) p(z, y), \qquad \text{para } k \geq 1.$$

17. (a) Probar que la familia $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dada en la Definición 5 verifica las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov discretas:

$$p_{j+k}(x, y) = \sum_{z \in U} p_j(x, z) p_k(z, y).$$

(b) A partir de la familia $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ definimos

$$p_t(x, y) = e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} p_k(x, y).$$

Probar que $\{p_t\}_{t \geq 0}$ son funciones de transición de probabilidad.

(c) Definir $q(x,y)$ como en el ejercicio 14, ver que está bien definido, verificar que es una $Q-$matriz y que $q = p - i$ donde $i(x,y) = \delta_{xy}$ es la matriz identidad.

18. Mostrar que si $U = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una $Q-$matriz, y

$$P_t = e^{tQ} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n Q^n}{n!}$$

entonces $p_t(x,y) = (P_t)_{x,y}$ son funciones de transición de probabilidad y se verifica la fórmula dada en el ejercicio 14.

Ahora volvemos al caso general $(U, \mathrm{dist}(\cdot,\cdot))$ un espacio métrico localmente compacto.

Definición 6 *Un generador de probabilidad es un operador lineal* $A\colon \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ *tal que*

(a) $\mathcal{D}(A)$ *es denso en* X.

(b) Si $f \in \mathcal{D}(A)$, $\lambda \geq 0$ *y* $f - \lambda A f = g$ *entonces*

$$\inf_{x\in U} f(x) \geq \inf_{x\in U} g(x).$$

(c) $R(I - \lambda A) = X$ *para todo* $\lambda > 0$ *suficientemente pequeño.*

(d) Si U *es compacto,* $1 \in \mathcal{D}(A)$ *y* $A1 = 0$.
Si U *es localmente compacto, entonces para todo* $\lambda > 0$ *pequeño, existe* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(A)$ *tal que* $g_n = f_n - \lambda A f_n$ *verifica que* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|g_n\| < \infty$ *y* $f_n, g_n \to 1$ *puntualmente.*

19. Probar que si $A\colon \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ es un generador de probabilidad, entonces se verifica que

$$(f \in \mathcal{D}(A),\ \lambda \geq 0,\ f - \lambda A f = g) \Rightarrow \|f\| \leq \|g\|.$$

20. Probar que si $A\colon \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ es un generador de probabilidad, entonces es un operador de Hille-Yosida.

21. Supongamos $U = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(A) = \{f \in X \colon f' \in X\}$ y $Af = f'$. Probar que A es un generador de probabilidad.

22. Supongamos que U es finito o numerable y sea q una $Q-$matriz. Definimos

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ f \in X \colon \sum_{y\in U} q(x,y) f(y) \text{ existe para todo } x \in U \text{ y pertenece a } X \right\},$$

$$Af(x) = \sum_{y\in U} q(x,y) f(y) = \sum_{y\in U} q(x,y)[f(y) - f(x)].$$

(a) Probar que si U es finito, entonces A es un generador de probabilidad.

(b) Supongamos que $U = \{0, 1, 2, \dots\}$ y consideremos la $Q-$matriz dada por

$$q(0,1) = 1,\; q(0,0) = -1,\; q(i,i-1) = \delta_i,\; q(i,i) = -\delta_i \text{ para } i \geq 1 \text{ y}$$
$$q(i,j) = 0 \text{ en los restantes lugares,}$$

donde $\delta_i > 0$.
Probar que A verifica las propiedades (a), (b) y (d) de la definición de generador de probabilidad y dar condiciones suficientes sobre los δ_i para que $R(I - \lambda A)$ contenga a las funciones con soporte finito.

23. Sea $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un semigrupo de probabilidad. Probar que su generador infinitesimal es un generador de probabilidad.

24. *Movimiento uniforme a la derecha*

    Sea $U = \mathbb{R}$ y consideremos el proceso de Feller en el cual P^x es la medida puntual soportada en $\omega(t) = x + t$. Probar que el semigrupo de probabilidad inducido por este proceso dado por el Ejercicio 11 es $T_t f(x) = f(x + t)$ y calcular su generador infinitesimal.

25. *El proceso de Cauchy*

    Sea $U = \mathbb{R}$ y consideremos el proceso de Feller tal que el incremento $X_{t+s} - X_s$ tiene una distribución Cauchy(0,t), i.e. su función de densidad viene dada por

$$\frac{1}{\pi}\frac{t}{t^2 + x^2}.$$

(a) Probar que el semigrupo de probabilidad inducido por el proceso dado por el Ejercicio 11 es
$$T_t f(x) = \frac{t}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x+y)}{t^2 + y^2}\, dy.$$

(b) Probar que si A es el generador infinitesimal de este semigrupo, entonces $C_c^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}(A)$ y
$$Af(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x+y) - f(x) - f'(x)\phi(y)}{y^2}\, dy, \quad f \in C_c^2(\mathbb{R}),$$
donde $\phi \in C_c^2(\mathbb{R})$ es impar y $\phi'(0) = 1$.
(*Sugerencia: Usar que* $\int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(y)}{t^2+y^2}\, dy = 0$ *para escribir*
$$\frac{T_t f(x) - f(x)}{t} = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x+y) - f(x) - f'(x)\phi(y)}{t^2 + y^2}\, dy,$$
usar que $f \in C_c^2(\mathbb{R})$ *y pasar al límite.*)

26. *El movimiento Browniano*

    Sea $U = \mathbb{R}$ y consideremos el operador definido por

$$Af = \frac{1}{2}f'', \qquad \mathcal{D}(A) = \{f \in X \colon f', f'' \in X\}.$$

(a) Probar que A es un generador de probabilidad.

(b) Consideremos $\{p_t\}_{t>0}$ las funciones de transición de probabilidad dadas en el Ejercicio 14 y sea $\{T_t\}_{t\geq 0}$ el semigrupo de probabilidad asociado como se define en el Ejercicio 13. Probar que su generador infinitesimal es A.