Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2019

Práctica 6

Operadores compactos y descomposición espectral de operadores compactos y autoadjuntos

Buscaba amor verdadero, encontré al fútbol (y al análisis funcional)

1. Sea $E = \ell^p$ con $1 \leq p \leq \infty$. Sea $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una sucesión acotada y consideremos el operador $T \in \mathcal{L}(E)$ definido por

$$Tx = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots).$$

Probar que T es compacto si y sólo si $\lambda_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

2. Sean E y F dos espacios de Banach y $T \in \mathcal{L}(E, F)$.
   (a) Probar que si E es reflexivo, entonces $T(B_E)$ es cerrado para la topología fuerte.
   (b) Probar que si E es reflexivo y T compacto, entonces $T(B_E)$ es compacto.
   (c) Sean $E = F = C([0, 1])$ y $Tu(t) = \int_0^t u(s)\, ds$. Verificar que $T \in \mathcal{K}(E)$. Probar que $T(B_E)$ no es cerrado.

3. Sean E y F dos espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{K}(E, F)$. Probar que si $\dim E = \infty$, entonces existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ tal que $\|x_n\|_E = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\|Tx_n\|_F \to 0$ cuando $n \to \infty$.

(*Sugerencia: Razonar por el absurdo.*)

4. Sea $1 \leq p < \infty$. Probar que $\ell^p \subset c_0$ con inclusión continua. Es compacta?

(*Sugerencia: Considerar la base canónica $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell^p$.*)

5. Sea $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una sucesión tal que $\lambda_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\lambda_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Sea V el espacio de sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |x_n|^2 < \infty.$$

En este espacio se define el producto escalar

$$(x, y)_V := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n y_n.$$

Probar que V es un espacio de Hilbert y que $V \subset \ell^2$ con inclusión compacta.

6. Sea $1 \leq q \leq p \leq \infty$. Probar que la inclusión $L^p((0, 1)) \subset L^q((0, 1))$ es continua pero no compacta.

(*Sugerencia: Considerar las funciones de Rademacher:*

$$f_n(x) = f(nx), \quad f(x) := \begin{cases} 1 & si\ x \in (0, \frac{1}{2}] \\ 0 & si\ x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

y extendida periódicamente a $\mathbb{R}$.)

7. Sean E y F dos espacios de Banach y $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Consideremos las siguientes propiedades:

$$\forall \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E \text{ tal que } u_n \rightharpoonup u \text{ in } \sigma(E,E^*) \Rightarrow Tu_n \to Tu \text{ fuerte en } F. \tag{1}$$

$$T \text{ es continuo de } (E, \sigma(E,E^*)) \text{ en } (F, \|\cdot\|_F). \tag{2}$$

   (a) Probar que (2) es equivalente a que T sea de rango finito.
   (b) Probar que si T es compacto, entonces se verifica (1).
   (c) Asumir que $E = \ell^1$ o que $F = \ell^1$. Probar que todo operador $T \in \mathcal{L}(E,F)$ verifica (1).
   (*Sugerencia: Usar que ℓ^1 tiene la propiedad de Schur.*)
   (d) Probar que si E es reflexivo, entonces T es compacto si y sólo si verifica (1).
   (e) Deducir que si E es reflexivo, entonces todo operador $T \in \mathcal{L}(E,\ell^1)$ es compacto.
   (f) Deducir que si E es reflexivo, entonces todo operador $T \in \mathcal{L}(c_0,E)$ es compacto.
   (*Sugerencia: Considerar el operador adjunto T^*.*)

8. Sean E y F dos espacios de Banach y $T \in \mathcal{K}(E,F)$ tal que $R(T)$ es cerrado.
   (a) Probar que T es de rango finito.
   (*Sugerencia: Usar el teorema de la aplicación abierta.*)
   (b) Probar que si $\dim N(T) < \infty$, entonces $\dim E < \infty$.

9. Sean E y F dos espacios de Banach y $T \in \mathcal{L}(E,F)$
   (a) Probar que las siguientes propiedades son equivalentes:
      i. $\dim N(T) < \infty$ y $R(T)$ es cerrado.
      ii. Existe un proyector $P \in \mathcal{L}(E)$ de rango finito y una constante $C > 0$ tal que
      $$\|u\|_E \leq C(\|Tu\|_F + \|Pu\|_E) \quad \forall u \in E.$$
      iii. Existe un espacio de Banach G, un operador $Q \in \mathcal{K}(E,G)$ y una constante $C > 0$ tal que
      $$\|u\|_E \leq C(\|Tu\|_F + \|Qu\|_G) \quad \forall u \in E.$$
   (*Sugerencia: Cuando* $\dim N(T) < \infty$*, considerar un complemento de* $N(T)$*.*)
   (b) Probar que si T verifica i., entonces $(T+S)$ también verifica i. para todo $S \in \mathcal{K}(E,F)$.
   (c) Probar que el conjunto de los operadores $T \in \mathcal{L}(E,F)$ que verifica i. es un abierto de $\mathcal{L}(E,F)$.
   (d) Sea $F_0 \subset F$ un subespacio cerrado y $S \in \mathcal{K}(F_0,F)$. Probar que $(I+S)(F_0)$ es un subespacio cerrado de F.

10. Sea $Q(t) = \sum_{k=1}^{p} a_k t^k$ un polinomio tal que $Q(1) \neq 0$. Sea E un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(E)$. Asumir que $Q(T) \in \mathcal{K}(E)$.

(a) Probar que $\dim N(I-T) < \infty$ y que $R(T)$ es cerrado. Más generalmente, probar que $(I-T)(E_0)$ es cerrado para todo subespacio cerrado $E_0 \subset E$.
(*Sugerencia: Escribir $Q(1) - Q(t) = \tilde{Q}(t)(1-t)$ para algún polinomio $\tilde{Q}$ y aplicar el ejercicio 9.*)

(b) Probar que $N(I-T) = 0$ si y sólo si $R(I-T) = E$.

(c) Probar que $\dim N(I-T) = \dim N(I-T^*)$.
(*Sugerencia para los ítems (b) y (c): Usar el mismo método de demostración que en la alternativa de Fredholm.*)

11. Sea K un espacio métrico compacto y $E = C(K;\mathbb{R})$ equipado con la norma del supremo $\|\cdot\|_\infty$.

Sea $F \subset E$ un subespacio cerrado. Asumamos que toda función $u \in F$ es Hölder continua, i.e.

$$\forall u \in F,\ \exists \alpha \in (0,1] \text{ y } L > 0 \text{ tal que } |u(x) - u(y)| \leq L \operatorname{dist}(x,y)^\alpha \ \forall x, y \in K.$$

El propósito de este ejercicio es probar que $\dim F < \infty$.

(a) Probar que existen constantes $\gamma \in (0,1]$ y $C \geq 0$ (independientes de $u \in F$) tales que

$$|u(x) - u(y)| \leq C\|u\|_\infty \operatorname{dist}(x,y)^\gamma \quad \forall u \in F, \quad \forall x, y \in K.$$

(*Sugerencia: Usar el Teorema de Baire con*

$$F_n := \{u \in F \colon |u(x) - u(y)| \leq n \operatorname{dist}(x,y)^{\frac{1}{n}},\ \forall x, y \in K\})$$

(b) Probar que B_F es compacta y concluir que $\dim F < \infty$.

12. (a) *Un lema de J.-L. Lions*
Sean X, Y y Z tres espacios de Banach con normas $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ y $\|\cdot\|_Z$ respectivamente. Asumamos que $X \subset Y$ con inclusión compacta y que $Y \subset Z$ con inclusión continua. Probar que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists C_\varepsilon \geq 0 \text{ tal que } \|u\|_Y \leq \varepsilon\|u\|_X + C_\varepsilon\|u\|_Z \ \forall u \in X.$$

(*Sugerencia: Razonar por el absurdo.*)

(b) *Aplicación*
Probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon \geq 0$ tal que

$$\max_{[0,1]} |u| \leq \varepsilon \max_{[0,1]} |u'| + C_\varepsilon \int_0^1 |u|\, dt \qquad \forall u \in C^1([0,1]).$$

13. Sean E y F dos espacios de Banach con normas $\|\cdot\|_E$ y $\|\cdot\|_F$ respectivamente. Asumamos que E es reflexivo. Sea $T \in \mathcal{K}(E,F)$. Consideremos en E otra norma, $|\cdot|$ que es más débil que $\|\cdot\|_E$, i.e. $|u| \leq C\|u\|_E$ para todo $u \in E$. Probar que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists C_\varepsilon \geq 0 \text{ tal que } \|Tu\|_F \leq \varepsilon\|u\|_E + C_\varepsilon|u| \ \forall u \in E.$$

Mostrar que el resultado puede ser falso si E no es reflexivo.

(*Sugerencia: Tomar $E = C([0,1])$, $F = \mathbb{R}$, $\|u\|_E = \|u\|_\infty$ y $|u| = \|u\|_{L^1}$.*)

14. Sea E un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(E)$ con $\|T\| < 1$.

    (a) Probar que $(I - T)$ es biyectiva y que
    $$\|(I-T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|T\|}.$$

    (b) Sea $S_n = I + T + \cdots + T^{n-1}$. Probar que
    $$\|S_n - (I-T)^{-1}\| \leq \frac{\|T\|^n}{1-\|T\|}.$$

15. Sea E un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(E)$.

    (a) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $|\lambda| > \|T\|$. Probar que
    $$\|I + \lambda(T-\lambda I)^{-1}\| \leq \frac{\|T\|}{|\lambda| - \|T\|}.$$

    (b) Sea $\lambda \in \rho(T)$. Verificar que $(T-\lambda I)^{-1}T = T(T-\lambda I)^{-1}$ y probar que
    $$\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(T)) \geq \frac{1}{\|(T-\lambda I)^{-1}\|}.$$

    (c) Asumir que $0 \in \rho(T)$. Probar que
    $$\sigma(T^{-1}) = \frac{1}{\sigma(T)} := \{\lambda^{-1} \colon \lambda \in \sigma(T)\}.$$

    En lo que sigue asumimos que $1 \in \rho(T)$ y definimos
    $$U = (T+I)(T-I)^{-1} = (T-I)^{-1}(T+I).$$

    (d) Chequear que $1 \in \rho(U)$ y dar una expresión simple para $(U-I)^{-1}$ en términos de T.

    (e) Probar que $T = (U+I)(U-I)^{-1}$.

    (f) Considerar la función $f(t) = \frac{t+1}{t-1}$, $t \in \mathbb{R}$ y probar que
    $$\sigma(U) = f(\sigma(T)) := \{f(\lambda) \colon \lambda \in \sigma(T)\}.$$

16. Sea E un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(E)$.

    (a) Asumir que $T^2 = I$. Probar que $\sigma(T) \subset \{-1, 1\}$ y determinar $(T-\lambda I)^{-1}$ para $\lambda \neq \pm 1$.

    (b) Más generalmente, asumir que existe un entero $n \geq 2$ tal que $T^n = I$. Probar que $\sigma(T) \subset \{-1, 1\}$ y determinar $(T-\lambda I)^{-1}$ para $\lambda \neq \pm 1$.

    (c) Asumir que existe un entero $n \geq 2$ tal que $T^n = 0$. Probar que $\sigma(T) = \{0\}$ y determinar $(T-\lambda I)^{-1}$ para $\lambda \neq 0$.

    (d) Asumir que existe un entero $n \geq 2$ tal que $\|T^n\| < 1$. Probar que $(I-T)$ es biyectiva y dar una expresión para $(I-T)^{-1}$ en términos de $(I-T^n)^{-1}$ y de los iterados de T.

17. Sea $E = \ell^p$ con $1 \leq p \leq \infty$ y sea $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una sucesión acotada. Consideremos el operador de multiplicación $M \in \mathcal{L}(E)$ dado por

$$Mx = (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n, \ldots).$$

Determinar $\sigma(M)$ y $\sigma_p(M)$.

18. *Propiedades espectrales de los shifts*

Un elemento $x \in E = \ell^2$ se nota $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$.

Consideramos los operadores

$$S_d x = (0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \quad \text{y} \quad S_i x = (x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$$

llamados, respectivamente, los operadores Shift a derecha y a izquierda.

(a) Calcular $\|S_d\|$ y $\|S_i\|$. ¿Alguno de estos operadores es compacto?

(b) Probar que $\sigma(S_d) = [-1, 1]$.

(c) Probar que $\sigma_p(S_i) = (-1, 1)$. Determinar los autoespacios asociados a cada autovalor.

(d) Probar que $\sigma(S_i) = [-1, 1]$.

(e) Calcular S_d^* y S_i^*.

(f) Probar que para cada $\lambda \in (-1, 1)$ los espacios $R(S_d - \lambda I)$ y $R(S_i - \lambda I)$ son cerrados. Dar una representación explícita de esos espacios.

(g) Probar que los espacios $R(S_d \pm I)$ y $R(S_i \pm I)$ son densos y no cerrados.

Considerar el operador de multiplicación M definido en el ejercicio anterior.

(h) Determinar $\sigma_p(S_d \circ M)$.

(i) Supongamos que $\lambda_n \to \lambda$ cuando $n \to \infty$, Probar que $\sigma(S_d \circ M) = [-|\lambda|, |\lambda|]$. (*Sugerencia: Usar la Alternativa de Fredholm.*)

(j) Asumamos que $\lambda_{2n} = a$ y $\lambda_{2n+1} = b$ para cada $n \in \mathbb{N}$ con $a \neq b$. Determinar $\sigma(S_d \circ M)$.
(*Sugerencia: Calcular $(S_d \circ M)^2$ y aplicar el ítem (d) del ejercicio 16.*)

19. Sea E un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(E)$.

(a) Probar que $\sigma(T^*) = \sigma(T)$.

(b) Dar ejemplos que muestren que en general no hay relaciones de inclusión entre $\sigma_p(T)$ y $\sigma_p(T^*)$.

20. Sea $E = L^p((0, 1))$ con $1 \leq p < \infty$. Dada $u \in E$, se define

$$Tu(x) = \int_0^x u(t)\, dt.$$

(a) Probar que $T \in \mathcal{K}(E)$.

(b) Determinar $\sigma(T)$ y $\sigma_p(T)$.

(c) Dar fórmulas explícitas para $(T - \lambda I)^{-1}$ cuando $\lambda \in \rho(T)$.

(d) Calcular T^*.

21. Sean V y H dos espacios de Banach con normas $\|\cdot\|$ y $|\cdot|$ respectivamente que satisfacen
$$V \subset H \text{ con inclusión compacta.}$$
Sea $p(u)$ una seminorma en V tal que $p(u) + |u|$ es una norma en V equivalente a $\|\cdot\|$.
Definimos $N = \{u \in V : p(u) = 0\}$ y $\operatorname{dist}(u, N) = \inf_{v \in N} \|u - v\|$ para $u \in V$.
    (a) Probar que N es un subespacio de dimensión finita.
    (*Sugerencia: Considerar la bola unitaria de N con norma $|\cdot|$.*)
    (b) Probar que existe una constante $K_1 > 0$ tal que
    $$p(u) \leq K_1 \operatorname{dist}(u, N), \quad \forall u \in V.$$
    (c) Probar que existe una constante $K_2 > 0$ tal que
    $$K_2 \operatorname{dist}(u, N) \leq p(u), \quad \forall u \in V.$$
    (*Sugerencia: Suponer, por el absurdo, que existe una sucesión $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ tal que* $\operatorname{dist}(u_n, V) = 1$ *y $p(u_n) \to 0$ y llegar a una contradicción.*)

22. Sea E un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(E)$. Dado un polinomio $Q(t) = \sum_{k=0}^{p} a_k t^k$ con $a_k \in \mathbb{R}$, sea $Q(T) = \sum_{k=0}^{p} a_k T^k$.
    (a) Probar que $Q(\sigma_p(T)) \subset \sigma_p(Q(T))$.
    (b) Probar que $Q(\sigma(T)) \subset \sigma(Q(T))$.
    (c) Construir un ejemplo en $E = \mathbb{R}^2$ donde las inclusiones anteriores sean estrictas.
    En lo que sigue, asumamos que E es un espacio de Hilbert donde se realiza la identificación $E = E^*$ y asumamos que $T^* = T$.
    (d) Probar que si Q no tiene raíces reales, entonces $Q(T)$ es biyectivo.
    (*Sugerencia: Empezar con el caso $Q(t) = t^2 + 1$.*)
    (e) Deducir que para todo polinomio Q se tiene
    $$Q(\sigma_p(T)) = \sigma_p(Q(T)) \quad \text{y} \quad Q(\sigma(T)) = \sigma(Q(T)).$$
    (*Sugerencia: Factorizar $Q(t) - \lambda = (t - t_1)(t - t_2) \cdots (t - t_q)\bar{Q}(t)$ donde $t_1, t_2, \ldots, t_q$ son las raíces reales de $Q - \lambda$ y $\bar{Q}$ no tiene raíces reales.*)

23. *Radio espectral.*
Sea E un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(E)$. Definimos
$$a_n = \log \|T^n\|, \quad n \in \mathbb{N}.$$
    (a) Verificar que $a_{i+j} \leq a_i + a_j$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$.
    (b) Deducir que $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n}$ existe y que el mismo coincide con $\inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n}$.
    (*Sugerencia: Fijar $m \in \mathbb{N}$. Dado $n \in \mathbb{N}$, escribimos $n = mq + r$, donde $q = [\frac{n}{m}]$ (parte entera) y $0 \leq r < m$. Observar que $a_n \leq \frac{n}{m} a_m + a_r$.*)
    (c) Concluir que $r(T) = \lim_{n \to \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ existe y que $r(T) \leq \|T\|$. Construir un ejemplo en $E = \mathbb{R}^2$ tal que $r(T) = 0$ y $\|T\| = 1$.
    El número $r(T)$ se llama el *radio espectral* de T.

(d) Probar que $\sigma(T) \subset [-r(T), r(T)]$. Deducir que si $\sigma(T) \neq \emptyset$, entonces

$$\max\{|\lambda| \colon \lambda \in \sigma(T)\} \leq r(T).$$

(*Sugerencia: Observar que si* $\lambda \in \sigma(T)$, *entonces* $\lambda^n \in \sigma(T^n)$*; ver el ejercicio 22.*)

(e) Construir un ejemplo en $E = \mathbb{R}^3$ tal que $\sigma(T) = \{0\}$ pero $r(T) = 1$.

En lo que sigue, tomamos $E = L^p((0,1))$ con $1 \leq p \leq \infty$ y consideramos el operador $T \in \mathcal{L}(E)$ dado en el ejercicio 20.

(f) Probar, por inducción, que para $n \geq 2$ se tiene

$$(T^n u)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} u(t)\, dt.$$

(g) Deducir que $\|T^n\| \leq \frac{1}{n!}$.

(h) Probar que $r(T) = 0$.

(i) Probar que $\sigma(T) = \{0\}$. Comparar con el ejercicio 20.

24. Sea H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador autoadjunto.

(a) Probar que las siguientes propiedades son equivalentes:

i. $(Tu, u) \geq 0\ \forall u \in H$,

ii. $\sigma(T) \subset [0, \infty)$.

(b) Probar que las siguientes propiedades son equivalentes:

i. $\|T\| \leq 1$ y $(Tu, u) \geq 0\ \forall u \in H$,

ii. $0 \leq (Tu, u) \leq \|u\|^2\ \forall u \in H$,

iii. $\sigma(T) \subset [0, 1]$,

iv. $(Tu, u) \geq \|Tu\|^2\ \forall u \in H$.

(*Sugerencia: Para probar* iii.$\Rightarrow$ iv. *considerar el operador* $(T+\varepsilon I)^{-1}$ *con* $\varepsilon > 0$.)

(c) Probar que las siguientes propiedades son equivalentes:

i. $(Tu, u) \leq \|Tu\|^2\ \forall u \in H$,

ii. $(0, 1) \subset \rho(T)$.

(*Sugerencia: Considerar* $U = 2T - I$.)

25. Sea E un espacio de Banach y $K \in \mathcal{K}(E)$. Probar que existen $M, \tilde{M} \in \mathcal{L}(E)$ y proyectores de rango finito P y $\tilde{P}$ tales que

(a) $M \circ (I + K) = I - P$,

(b) $(I + K) \circ \tilde{M} = I - \tilde{P}$.

(*Sugerencia: Sea* X *un complemento de* $N(I + K)$ *en* E*. Entonces* $(I + K)|_X$ *es biyectivo de* X *en* $R(I + K)$*. Definir* M *el inverso. Sea* Q *la proyección de* E *sobre* $R(I + K)$ *y sea* $\tilde{M} = M \circ Q$*. Concluir lo pedido.*)

26. *De Brouwer a Schauder.*

En este ejercicio asumiremos el siguiente resultado (una prueba se ve en la materia de Topología):

Teorema 1 (Teorema de punto fijo de Brouwer) *Sea F un espacio de Banach de dimensión finita y sea $Q \subset F$ un conjunto compacto, convexo y no vacío. Sea $f: Q \to Q$ una función continua. Entonces f tiene un punto fijo. i.e. existe $p \in Q$ tal que $f(p) = p$.*

El objetivo de este ejercicio es probar el siguiente resultado:

Teorema 2 (Teorema de punto fijo de Shauder) *Sea E un espacio de Banach y $C \subset E$ un conjunto cerrado, convexo y no vacío. Sea $F: C \to C$ una función continua tal que $F(C) \subset K$, donde K es un conjunto compacto de C. Entonces F tiene un punto fijo en K.*

(a) Dado $\varepsilon > 0$, considerar un cubrimiento finito de K, i.e. $K \subset \bigcup_{i \in I} B(y_i, \frac{\varepsilon}{2})$, donde I es finito e $y_i \in K$ $\forall i \in I$. Definir la función $q(x) = \sum_{i \in I} q_i(x)$ donde

$$q_i(x) = \max\{\varepsilon - \|F(x) - y_i\|, 0\}.$$

Probar que q es continua en C y que $q(x) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall x \in C$.

(b) Se define ahora

$$F_\varepsilon(x) = \frac{\sum_{i \in I} q_i(x) y_i}{q(x)}, \quad x \in C.$$

Probar que $F_\varepsilon: C \to C$ es continua y que

$$\|F_\varepsilon(x) - F(x)\| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in C.$$

(c) Probar que F_ε admite un punto fijo $x_\varepsilon \in C$.
(*Sugerencia: Sea $Q = \mathrm{conv}(\cup_{i \in I}\{y_i\})$. Probar que $F_\varepsilon|_Q$ admite un punto fijo $x_\varepsilon \in Q$.*)

(d) Probar que existe una sucesión $\varepsilon_n \to 0$ tal que $\{x_{\varepsilon_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a un límite $x \in C$ y que x es un punto fijo de F.