Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2019

Práctica 5

Espacios de Hilbert

Un equipo es tan fuerte como las relaciones que hay dentro de él

1. (*La regla del paralelogramo*)

   Sea E un espacio vectorial normado tal que su norma verifica la *regla del paralelogramo*, i.e.
   $$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2) \qquad \forall a, b \in E.$$
   El objetivo es demostrar que
   $$(u,v) := \frac{1}{2}(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2) \qquad u, v \in E,$$
   define un producto escalar en E tal que $(u,u) = \|u\|^2$.

   (a) Verificar que
   $$(u,v) = (v,u), \quad (-u,v) = -(u,v) \quad \text{y} \quad (u,2v) = 2(u,v) \quad \forall u, v \in E.$$

   (b) Probar que
   $$(u+v, w) = (u,w) + (v,w) \quad \forall u, v, w \in E.$$
   (*Sugerencia: Usar la regla del paralelogramo sucesivamente con (i)* $a = u$, $b = v$; *(ii)* $a = u + w$, $b = v + w$; *(iii)* $a = u + v + w$, $b = w$.)

   (c) Probar que $(\lambda u, v) = \lambda(u,v)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u, v \in E$.
   (*Sugerencia: Considerar primero el caso* $\lambda \in \mathbb{N}$, *después* $\lambda \in \mathbb{Q}$ *y finalmente* $\lambda \in \mathbb{R}$.)

   (d) Concluir que $(\cdot,\cdot)$ verifica lo deseado.

2. (L^p *no es un espacio de Hilbert para* $p \neq 2$)

   Sea Ω un espacio de medida tal que existe $A \subset \Omega$ medible que verifica $0 < |A| < |\Omega|$.

   Probar que $\|\cdot\|_p$ no verifica la regla del paralelogramo para ningún $1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$.

   (*Sugerencia: Considerar funciones con soportes disjuntos.*)

3. Sea H un espacio de Hilbert y $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$. Sea $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$ tal que
   $$(t_n u_n - t_m u_m, u_n - u_m) \leq 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Probar que si $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente (eventualmente no acotada), entonces $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.
   (*Sugerencia: Probar que* $\{\|u_n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es dereciente.*)

   (b) Asumamos que $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente. Probar que se tiene la siguiente alternativa:

      i. o bien $\|u_n\| \to \infty$,

      ii. o bien $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

   Si $t_n \to t > 0$, probar que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y si $t_n \to 0$, probar que ambos casos de la alternativa pueden ocurrir.

4. Sea H un espacio de Hilbert y $K \subset H$ un conjunto cerrado, convexo, no vacío. Sea $f \in H$ y notamos $u = P_K f$.

   Probar que
   $$\|v-u\|^2 \le \|v-f\|^2 - \|u-f\|^2 \quad \forall v \in K.$$
   Deducir que
   $$\|v-u\| \le \|v-f\| \quad \forall v \in K.$$
   Dar una interpretación geométrica.

5. Sea H un espacio de Hilbert y $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos cerrados y convexos de H.

   (a) Probar que si $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y $\cap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$, entonces para cada $f \in H$ la sucesión $u_n = P_{K_n} f$ converge fuertemente a un límite. Identificar ese límite.

   (b) Probar que si $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y $K_1 \neq \emptyset$, entonces para cada $f \in H$ la sucesión $u_n = P_{K_n} f$ converge fuertemente a un límite. Identificar ese límite. Adicionalmente, si $\varphi\colon H \to \mathbb{R}$ es continua y acotada inferiormente, probar que la sucesión $\alpha_n = \inf_{K_n} \varphi$ es convergente e identificar el límite.

6. (*La proyección radial sobre la bola unitaria*)

   Sea E un espacio vectorial normado. Definimos
   $$Tu = \begin{cases} u & \text{si } \|u\| \le 1 \\ \frac{u}{\|u\|} & \text{si } \|u\| > 1 \end{cases}$$

   (a) Probar que $\|Tu - Tv\| \le 2\|u-v\|$.

   (b) Probar que, en general, la constante 2 no puede ser mejorada.
   (Sugerencia: Considerar $E = \mathbb{R}^2$ con la norma $\|(x,y)\| = |x| + |y|$.)

   (c) ¿Qué sucede si $\|\cdot\|$ es una norma Hilbertiana?

7. (*Proyección sobre un cono convexo*)

   Sea H un espacio de Hilbert y sea $K \subset H$ un cono convexo con vértice en el 0, i.e.
   $$0 \in K \quad \text{y} \quad \lambda u + \mu v \in K \quad \forall \lambda, \mu \ge 0, \quad \forall u, v \in K.$$
   Supongamos adicionalmente que K es cerrado.

   Dado $f \in H$, probar que $u = P_K f$ se caracteriza por la siguiente propiedad:
   $$u \in K, \quad (f-u, v) \le 0 \quad \forall v \in K \quad \text{y} \quad (f-u, u) = 0.$$

8. Sea Ω un espacio de medida y sea $h\colon \Omega \to [0,\infty)$ una función medible. Sea
   $$K = \{u \in L^2(\Omega)\colon |u(x)| \le h(x) \text{ c.t.p. en } \Omega\}.$$
   Probar que K es un conjunto no vacío, cerrado y convexo de $H = L^2(\Omega)$. Determinar P_K.

9. Sea H un espacio de Hilbert y $A, B \subset H$ dos conjuntos convexos, cerrados y no vacíos tales que $A \cap B = \emptyset$ y B es acotado. Definimos $C = A - B$.

(a) Probar que C es convexo y cerrado.

(b) Sea $u = P_C 0$ y descomponer $u = a_0 - b_0$ con $a_0 \in A$ y $b_0 \in B$ (observar que esto es posible pues $u \in C$).

Probar que $\|a_0 - b_0\| = \operatorname{dist}(A, B)$. Determinar $P_A b_0$ y $P_B a_0$.

(c) Suponer que $a_1 \in A$ y $b_1 \in B$ es otro par tal que $\|a_1 - b_1\| = \operatorname{dist}(A, B)$. Probar que $u = a_1 - b_1$.

Realizar un dibujo donde el par a_0, b_0 sea único (resp. no único).

(d) Dar una demostración simple del Teorema de Hahn-Banach, segunda forma geométrica, para espacios de Hilbert.

10. Sea H un espacio de Hilbert y $F \colon H \to \mathbb{R}$ una función convexa de clase C^1. Sea $K \subset H$ convexo y $u \in H$. Probar que las siguientes propiedades son equivalentes:

(a) $F(u) \leq F(v)\ \forall v \in K$,

(b) $(F'(u), v - u) \geq 0\ \forall v \in K$.

11. Sea H un espacio de Hilbert y $M \subset H$ un subespacio cerrado, $M \neq \{0\}$. Sea $f \in H$, $f \notin M^\perp$.

(a) Probar que

$$m = \inf_{\substack{u \in M \\ \|u\|=1}} (f, u)$$

se alcanza en un único punto.

(b) Sean $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in H$ dados y notamos por E el subespacio lineal generado por ellos. Determinar m en los siguientes casos:

$$i.\ M = E \qquad\qquad ii.\ M = E^\perp.$$

(c) Examinar el caso en que $H = L^2((0,1))$, $\varphi_1(t) = t$, $\varphi_2(t) = t^2$ y $\varphi_3(t) = t^3$.

12. (*Completación de un espacio pre-Hilbert*)

Sea E un espacio vectorial equipado con un producto escalar $(\cdot, \cdot)$. No asumimos que E sea completo con la norma $\|u\| = (u, u)^{\frac{1}{2}}$.

Recordar que el espacio dual E^* equipado con la norma dual es completo.

Sea $T \colon E \to E^*$ el mapa definido por

$$\langle Tu, v \rangle = (u, v) \quad \forall u, v \in E.$$

Chequear que T es una isometría lineal. ¿Es T suryectivo?

El objetivo es mostrar que $R(T)$ es denso en E^* y que $\| \cdot \|_{E^*}$ es una norma de Hilbert.

(a) Transferir a $R(T)$ el producto escalar de E y extenderlo a $\overline{R(T)}$. El producto escalar resultante se denota por $((f, g))$ con $f, g \in \overline{R(T)}$.

Chequear que la norma correspondiente $((f, f))^{\frac{1}{2}}$ coincide en $\overline{R(T)}$ con $\|f\|_{E^*}$.

Probar que

$$\langle f, v \rangle = ((f, Tv)) \quad \forall v \in E, \quad \forall f \in \overline{R(T)}.$$

(b) Probar que $\overline{R(T)} = E^*$.

(*Sugerencia: Dada $f \in E^*$, transferir f a un funcional lineal sobre $R(T)$ y usar el teorema de representación de Riesz-Fréchet en $\overline{R(T)}$.*)

Deducir que E^* es un espacio de Hilbert con la norma $\|\cdot\|_{E^*}$.

(c) Concluir que la completación de E se puede identificar con E^*.

13. Sea E un espacio vectorial normado. Recordar que el mapa de dualidad (multivaluado) se define como

$$F(u) = \{f \in E^* \colon \|f\|_{E^*} = \|u\|_E \text{ y } \langle f, u\rangle = \|u\|_E^2\}.$$

(a) Probar que si F verifica que $F(u) + F(v) \subset F(u+v)$ $\forall u, v \in E$, entonces la norma $\|\cdot\|_E$ proviene de un producto escalar.

(b) Recíprocamente, si la norma $\|\cdot\|_E$ proviene de un producto escalar, ¿ qué puede decirse de F?

(*Sugerencia: Usar el ejercicio anterior.*)

14. Sea H un espacio de Hilbert y $a \colon H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal, continua tal que

$$a(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in H.$$

Probar que la función $v \mapsto F(v) = a(v, v)$ es convexa, de clase C^1 y calcular su diferencial.

15. Sea H un espacio de Hilbert y $G \subset H$ un subespacio equipado con la norma de H. Sea F un espacio de Banach y $S \colon G \to F$ un operador lineal acotado.

Probar que existe un operador lineal acotado $T \colon H \to F$ que extiende S tal que

$$\|T\|_{\mathcal{L}(H,F)} = \|S\|_{\mathcal{L}(G,F)}.$$

16. (El triple de Hilbert $V \subset H \subset V^*$)

Sea H un espacio de Hilbert equipado con producto interno $(\cdot,\cdot)_H$ y norma $\|\cdot\|_H$. Sea $V \subset H$ un subespacio denso. Asumamos que en V se tiene definida otra norma $\|\cdot\|_V$ tal que $(V, \|\cdot\|_V)$ es un espacio de Banach y que la inclusión $i \colon (V, \|\cdot\|_V) \to (H, \|\cdot\|_H)$ es continua, i.e.

$$\|v\|_H \leq C\|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

Consideremos el operador $T \colon H \to V^*$ dado por

$$\langle Tu, v\rangle_{V^*,V} = (u, v)_H \quad \forall u \in H, \quad \forall v \in V.$$

(a) Probar que $\|Tu\|_{V^*} \leq C\|u\|_H$ $\forall u \in H$.

(b) Probar que T es inyectiva.

(c) Probar que $R(T)$ es denso en V^* si V es reflexivo.

(d) Dado $f \in V^*$, probar que $f \in R(T)$ si y sólo si existe una constante $a \geq 0$ tal que $|\langle f, v\rangle_{V^*,V}| \leq a\|v\|_H$ $\forall v \in V$.

17. Sea H un espacio de Hilbert y $M, N \subset H$ dos subespacios cerrados tales que $(u, v) = 0$ $\forall u \in M$, $\forall v \in N$. Probar que $M + N$ es cerrado.

18. Sea E un espacio de Banach y H un espacio de Hilbert. Sea $T \in \mathcal{L}(E, H)$. Probar que las siguientes propiedades son equivalentes:

   (a) T admite una inversa a izquierda,

   (b) existe una constante C tal que $\|u\|_E \leq C\|Tu\|_H$ $\forall u \in E$.

19. Sea H un espacio de Hilbert y $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ débilmente en H. Asumamos que $\limsup_{n\to\infty} \|u_n\| \leq \|u\|$. Probar, sin usar los resultados sobre espacios uniformemente convexos, que $u_n \to u$ fuertemente.

20. Sea H un espacio de Hilbert y $S \in \mathcal{L}(H)$ tal que $(Su, u) \geq 0$ $\forall u \in H$.

   (a) Probar que $N(S) = R(S)^\perp$.

   (b) Probar que $I + tS$ es biyectiva para todo $t > 0$.

   (c) Probar que
   $$\lim_{t\to\infty} (I + tS)^{-1} f = P_{N(S)} f \quad \forall f \in H.$$
   (*Sugerencia: Dos métodos son posibles: 1.- considerar los casos* $f \in N(S)$ *y* $f \in R(S)$ *o 2.- usar convergencia débil.*)

21. (*Iteraciones de contracciones lineales. El teorema ergódico de Kakutani-Yosida.*)

   Sea H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$ tal que $\|T\| \leq 1$. Dada $f \in H$ y $n \in \mathbb{N}$, definimos
   $$\sigma_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k f \quad \text{y} \quad \mu_n(f) = \left(\frac{I+T}{2}\right)^n f.$$
   El objetivo es demostrar que
   $$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(f) = P_{N(I-T)} f.$$

   (a) Probar que $N(I - T) = R(I - T)^\perp$.

   (b) Sea $f \in R(I - T)$. Probar que existe una constante C tal que $\|\sigma_n(f)\| \leq \frac{C}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

   (c) Deducir que para toda $f \in H$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f) = P_{N(I-T)} f$.

   (d) Notemos $S = \frac{1}{2}(I + T)$. Probar que
   $$\|u - Su\|^2 + \|Su\|^2 \leq \|u\|^2 \quad \forall u \in H.$$
   Deducir que
   $$\sum_{i=0}^{\infty} \|S^i u - S^{i+1} u\|^2 \leq \|u\|^2 \quad \forall u \in H$$
   y que
   $$\|S^n(u - Su)\| \leq \frac{\|u\|}{\sqrt{n+1}} \quad \forall u \in H, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   (e) Sea $f \in R(I - T)$. Probar que existe una constante C tal que $\|\mu_n(f)\| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

   (f) Deducir que para toda $f \in H$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} \mu_n(f) = P_{N(I-T)} f$.

22. Sea H un espacio de Hilbert y $C \subset H$ un conjunto convexo, cerrado y no vacío. Sea $T\colon C \to C$ una contracción no lineal, i.e.

$$\|Tu - Tv\| \le \|u - v\| \quad \forall u, v \in C.$$

   (a) Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ débil en H y $(u_n - Tu_n) \to f$ fuerte en H. Probar que $u - Tu = f$.

   (*Sugerencia: Probar primero el caso $C = H$ y usar la desigualdad $((u - Tu) - (v - Tv), u - v) \ge 0$ $\forall u, v \in H$.*)

   (b) Deducir que si C es acotado y $T(C) \subset C$, entonces T tiene un punto fijo.

   (*Sugerencia: Considerar $T_\varepsilon u = (1 - \varepsilon)Tu + \varepsilon a$ con $a \in C$ fijo, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \to 0$.*)

23. (*Desigualdad de Zarantonello*)

   Sea H un espacio de Hilbert y $T\colon H \to H$ una contracción no lineal. Asumamos que $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ son tales que $\alpha_i \ge 0$ y $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Dados $u_1, \dots, u_n \in H$, notamos

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i.$$

   Probar que

$$\left\| T\sigma - \sum_{i=1}^n \alpha_i T u_i \right\|^2 \le \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j \left(\|u_i - u_j\|^2 - \|Tu_i - Tu_j\|^2 \right).$$

   (*Sugerencia: Escribir*

$$\left\| T\sigma - \sum_{i=1}^n \alpha_i T u_i \right\|^2 \le \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j (T\sigma - Tu_i, T\sigma - Tu_j)$$

   y usar la identidad $(a, b) = \frac{1}{2}(\|a\|^2 + \|b\|^2 - \|a - b\|^2)$.)

   ¿Qué puede deducirse si T es una isometría (i.e. $\|Tu - Tv\| = \|u - v\|$ $\forall u, v \in H$)?

24. (*La propiedad de Banach-Sacks*)

   Sea H un espacio de Hilbert.

   (a) Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ tal que $u_n \rightharpoonup 0$ débil. Construir por inducción una subsucesión $\{u_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $u_{n_1} = u_1$ y

$$|(u_{n_j}, u_{n_k})| \le \frac{1}{k} \quad \forall k \ge 2 \quad \text{y} \quad \forall j = 1, \dots, k-1.$$

   Deducir que la sucesión $\{\sigma_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ definida por $\sigma_i = \frac{1}{i}\sum_{j=1}^i u_{n_j}$ converge fuertemente a 0 cuando $i \to \infty$.

   (*Sugerencia: Estimar $\|\sigma_i\|^2$.*)

   (b) Asumir que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ es acotada. Probar que existe una subsucesión $\{u_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que la sucesión $\sigma_i = \frac{1}{i}\sum_{j=1}^i u_{n_j}$ converge fuertemente a un límite cuando $i \to \infty$.

25. (*Variaciones de un lema de Opial*)

Sea H un espacio de Hilbert y $K \subset H$ un conjunto convexo, cerrado y no vacío. Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ tal que para todo $v \in K$ la sucesión $\{\|u_n - v\|\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es decreciente.

(a) Probar que la sucesión $\{\mathrm{dist}(u_n, K)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es decreciente.

(b) Probar que la sucesión $\{P_K u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ converge fuertemente a un límite, denotado por ℓ.

(*Sugerencia: Usar el ejercicio 4 de esta guía.*)

(c) Asumir que la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ verifica la propiedad:

Toda subsucesión que converja débil, su límite pertenece a K.

Probar que entonces $u_n \rightharpoonup \ell$ débil.

(d) Asumir que $\cup_{\lambda>0}\lambda(K - K) = H$. Probar que existe $u \in H$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ débil y $P_K u = \ell$.

(e) Asumir que $K^\circ \neq \emptyset$. Probar que existe $u \in H$ tal que $u_n \to u$ fuerte.

(*Sugerencia: Considerar primero el caso en que K es la bola unitaria y luego el caso general.*)

(f) Sea $\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n u_i$ y asumir que $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ verifica la propiedad del ítem (c). Probar que $\sigma_n \rightharpoonup \ell$ débil.

26. Sea H un espacio de Hilbert y $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ una base ortonormal.

(a) Probar que $e_n \rightharpoonup 0$ débil.

(b) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una sucesión acotada y definimos $u_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i e_i$. Probar que $u_n \to 0$ fuerte.

(c) Probar que $\sqrt{n}u_n \rightharpoonup 0$ débil, donde $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión definida en el ítem anterior.

27. Sea H un espacio de Hilbert y $D \subset H$ un conjunto tal que el subespacio generado por él es denso en H.

Sea $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios cerrados de H que son mutuamente ortogonales. Asumamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|P_{E_n} u\|^2 = \|u\|^2 \quad \forall u \in D.$$

Probar que H es la suma Hilbertiana de los E_n.

28. Sea H un espacio de Hilbert separable.

(a) Sea $V \subset H$ un subespacio denso. Probar que V contiene una base ortonormal de H.

(b) Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ una sucesión ortonormal. Probar que existe una base ortonormal de H que contiene a $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

29. (*Un lema de Grothendieck*)

Sea Ω un espacio de medida con $|\Omega| < \infty$. Sea E un subespacio cerrado de $L^p(\Omega)$ con $1 \le p < \infty$. Asumamos que $E \subset L^\infty(\Omega)$. El objetivo es probar que $\dim E < \infty$.

(a) Probar que existe una constante C tal que

$$\|u\|_\infty \leq C\|u\|_p \quad \forall u \in E.$$

(b) Probar que existe una constante M tal que

$$\|u\|_\infty \leq M\|u\|_2 \quad \forall u \in E.$$

(c) Deducir que E es un subespacio cerrado de $L^2(\Omega)$.

En lo que sigue, asumimos que $\dim E = \infty$. Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de E equipado con el producto escalar de L^2.

(d) Sea $k \in \mathbb{N}$. Probar que existe un conjunto de medida cero $Z \subset \Omega$ tal que

$$\sum_{n=1}^{k} \alpha_i e_i(x) \leq M \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall x \in \Omega \setminus Z, \quad \forall \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k.$$

(*Sugerencia: Considerar primero el caso $\alpha \in \mathbb{Q}^k$.*)

(e) Deducir que $\sum_{i=1}^{k} |e_i(x)|^2 \leq M^2 \ \forall x \in \Omega \setminus Z$.

(f) Concluir que $\dim E < \infty$.

30. Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2((0,1))$ una sucesión ortonormal. Sea $p(t) \in L^2((0,1))$ fija.

(a) Probar que para todo $t \in (0,1)$, se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^t p(s)e_n(s)\, ds \right|^2 \leq \int_0^t |p(s)|^2\, ds.$$

(b) Deducir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left| \int_0^t p(s)e_n(s)\, ds \right|^2 dt \leq \int_0^1 |p(t)|^2(1-t)\, dt.$$

(c) Probar que si $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal las desigualdades de los ítems anteriores se convierten en igualdades.

(d) Recíprocamente, probar que si se tiene la igualdad en el ítem (b) y $p(t) \neq 0$ c.t.p., entonces $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal.

31. (*La base de Haar*)

Dado $n \in \mathbb{N}$, escribimos $n = k + 2^p$ con $k, p \geq 0$ enteros. Observar que k y p están unívocamente definidos. Consideremos la función $\phi_n \in L^2((0,1))$ definida por

$$\phi_n(t) = \begin{cases} 2^{\frac{p}{2}} & \text{si } k2^{-p} < t < (k+\frac{1}{2})2^{-p}, \\ -2^{\frac{p}{2}} & \text{si } (k+\frac{1}{2})2^{-p} < t < (k+1)2^{-p}, \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$$

Se define $\phi_0 = 1$. Probar que $\{\phi_n\}_{n\geq 0}$ es una base ortonormal de $L^2((0,1))$.

32. (*El sistema de Rademacher y la base de Walsh*)

Para cada entero $i \geq 0$ se define la función $r_i(t)$ para $t \in (0,1)$ como $r_i(t) = (-1)^{[2^i t]}$ ($[x]$ denota la parte entera de x).

(a) Probar que $\{r_i\}_{i\geq 0}$ es una sucesión ortonormal de $L^2((0,1))$ (llamado el sistema de Rademacher).

(b) ¿Es $\{r_i\}_{i\geq 0}$ una base ortonormal?
(*Sugerencia: Considerar la función* $u = r_1 r_2$.)

(c) Dado un entero $n \geq 0$, considerar la representación binaria $n = \sum_{i=0}^{\ell} \alpha_i 2^i$ con $\alpha_i \in \{0,1\}$.
Definimos
$$w_n(t) = \prod_{i=0}^{\ell} r_{i+1}(t)^{\alpha_i}.$$
Probar que $\{w_n\}_{n\geq 0}$ es una base ortonormal de $L^2((0,1))$ (llamada la base de Walsh). Observar que $\{r_i\}_{i\geq 0} \subset \{w_n\}_{n\geq 0}$.