Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2019

Práctica 4

Topologías débiles

Te largan a la cancha sin preguntarte si querés jugar

1. Sea E un espacio de Banach y $A \subset E$ un subconjunto compacto para la topología débil $\sigma(E, E^*)$. Probar que A es acotado.

2. Sea E un espacio de Banach y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ una sucesión tal que $x_n \rightharpoonup x$ en la topología débil $\sigma(E, E^*)$. Notemos

$$y_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j.$$

   Probar que $y_n \rightharpoonup x$ en la topología débil $\sigma(E, E^*)$.

3. Sea E un espacio de Banach y $A \subset E$ un subconjunto convexo. Probar que la clausura de A en la topología fuerte y en la topología débil $\sigma(E, E^*)$ coinciden.

4. Sea E un espacio de Banach y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ una sucesión tal que $x_n \rightharpoonup x$ en la topología débil $\sigma(E, E^*)$.

   (a) Probar que existe una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ tal que

      i. $y_n \in \operatorname{conv}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty}\{x_i\}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

      ii. $y_n \to x$ en la topología fuerte.

   (b) Probar que existe una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ tal que

      i. $z_n \in \operatorname{conv}\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

      ii. $z_n \to x$ en la topología fuerte.

5. Sea E un espacio de Banach y sea $K \subset E$ un subconjunto compacto para la topología fuerte. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ tal que $x_n \rightharpoonup x$ en la topología débil $\sigma(E, E^*)$. Probar que $x_n \to x$ en la topología fuerte.

   (*Sugerencia: razonar por el absurdo.*)

6. Sea X un espacio topológico y E un espacio de Banach. Sean $u, v\colon X \to E$ dos funciones continuas donde en E se considera la topología débil $\sigma(E, E^*)$.

   (a) Probar que el mapa $x \mapsto u(x) + v(x)$ es continuo de X en E con la topología débil $\sigma(E, E^*)$.

   (b) Sea $a\colon X \to \mathbb{R}$ una función continua. Probar que el mapa $x \mapsto a(x)u(x)$ es continuo de X en E con la topología débil $\sigma(E, E^*)$.

7. Sea E un espacio de Banach y sea $A \subset E$ un subconjunto cerrado en la topología débil $\sigma(E, E^*)$. Sea $B \subset E$ un subconjunto compacto en la topología débil $\sigma(E, E^*)$.

   (a) Probar que $A + B$ es cerrado en la topología débil $\sigma(E, E^*)$.

(b) Asumir adicionalmente que A y B son convexos, no vacíos y disjuntos. Probar que existe un hiperplano cerrado que separa A y B estríctamente.

8. Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita. El objetivo de este ejercicio es demostrar que E con la topología débil $\sigma(E, E^*)$ no es metrizable. Supongamos, por contradicción, que existe una métrica $d(x, y)$ en E que induce en E la topología $\sigma(E, E^*)$.

   (a) Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea V_k un entorno del 0 en la topología $\sigma(E, E^*)$ tal que

   $$V_k \subset \left\{ x \in E \colon d(x, 0) < \frac{1}{k} \right\}.$$

   Probar que existe una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E^*$ tal que toda $g \in E^*$ es una combinación lineal finita de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
   (*Sugerencia: Usar el siguiente resultado: Si $f, f_1, \ldots, f_k \in E^*$ son tales que*

   $$\langle f_i, x\rangle = 0 \ \forall i = 1, \ldots, k \Rightarrow \langle f, x\rangle = 0,$$

   entonces $f \in gen\{f_1, \ldots, f_k\}$.)

   (b) Deducir que E^* es de dimensión finita.
   (*Sugerencia: Lema de Baire.*)

   (c) Concluir que entonces E tiene dimensión finita.

   (d) Probar por un método similar que E^* equipado con la topología débil* $\sigma(E^*, E)$ no es metrizable.

9. Sea E un espacio de Banach, $M \subset E$ un subespacio lineal y $f_0 \in E^*$. Probar que existe $g_0 \in M^\perp$ tal que

   $$\inf_{g\in M^\perp} \|f_0 - g\| = \|f_0 - g_0\|.$$

   (*Sugerencia: Usar la topología débil* $\sigma(E^*, E)$.*)

10. Sean E y F dos espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$, con lo que $T^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$. Probar que T^* es continuo desde F^* con la topología $\sigma(F^*, F)$ en E^* con la topología $\sigma(E^*, E)$.

11. Sea E un espacio de Banach y $A \colon E \to E^*$ un operador monótono definido con $D(A) = E$ (ver el ejercicio 6 de la práctica 3). Asumir que para cada $x, y \in E$ el mapa

   $$t \in \mathbb{R} \mapsto \langle A(x + ty), y\rangle$$

   es continuo en $t = 0$. Probar que A es continuo desde E con la topología fuerte en E^* con la topología $\sigma(E^*, E)$.

12. Sea E un espacio de Banach. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ una sucesión y $x \in E$. Definimos

   $$K_n := \overline{\operatorname{conv}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty}\{x_i\}\right)}.$$

   (a) Probar que si $x_n \rightharpoonup x$ en la topología débil $\sigma(E, E^*)$, entonces

   $$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x\}.$$

(b) Asumir ahora que E es reflexivo. Probar que si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado y que si $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x\}$, entonces $x_n \rightharpoonup x$ en la topología débil $\sigma(E, E^*)$.

(c) Probar que si E es de dimensión finita, entonces las conclusiones del ítem previo siguen siendo ciertas sin la necesidad de asumir que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sea acotado.

(d) En ℓ^p, $1 < p < \infty$, construir una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x\}$ y que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no sea acotada.

13. Sea E un espacio de Banach reflexivo y sea I un conjunto de índices. Considerar una colección $\{f_i\}_{i\in I} \subset E^*$ y una colección $\{\alpha_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{R}$. Sea $M > 0$.

    Mostrar que las siguientes propiedades son equivalentes:

    (a) Existe $x \in E$ con $\|x\| \leq M$ tal que $\langle f_i, x\rangle = \alpha_i$ para todo $i \in I$.

    (b) Para todo subconjunto finito de índices $J \subset I$ y para toda colección $\{\beta_i\}_{i\in J} \subset \mathbb{R}$ se verifica que
    $$\left|\sum_{i\in J} \beta_i \alpha_i\right| \leq M \left\|\sum_{i\in J} \beta_i f_i\right\|.$$

14. *Centro de masa de una medida en un conjunto convexo*

    Sea E un espacio de Banach reflexivo y sea $K \subset E$ un subconjunto acotado, cerrado y convexo. Equipamos K con la topología débil $\sigma(E, E^*)$ con la que resulta compacto. Sea $F = C(K)$ con la norma usual ($\|\cdot\|_F = \|\cdot\|_\infty$). Fijamos $\mu \in F^*$, $\|\mu\| = 1$ y asumimos que $\mu \geq 0$ en el sentido que
    $$\langle \mu, u\rangle \geq 0 \qquad \forall u \in C(K), \quad u \geq 0 \text{ en } K.$$
    Probar que existe un único elemento $x_0 \in K$ tal que
    $$\langle \mu, f|_K\rangle = \langle f, x_0\rangle \qquad \forall f \in E^*. \tag{1}$$
    (*Sugerencia: Probar primero la existencia de $x_0 \in E$ que verifique* (1) *y luego probar que $x_0 \in K$ con la ayuda del Teorema de Hahn-Banach.*)

15. Sea E un espacio de Banach.

    (a) Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E^*$ tal que para todo $x \in E$, $\{\langle f_n, x\rangle\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es convergente. Probar que existe $f \in E^*$ tal que $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ en la topología $\sigma(E^*, E)$.

    (b) Asumir que E es reflexivo. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ tal que para todo $f \in E^*$, $\{\langle f, x_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es convergente. Probar que existe $x \in E$ tal que $x_n \rightharpoonup x$ en la topología $\sigma(E, E^*)$.

    (c) Construir un ejemplo en un espacio E no reflexivo donde las conclusiones de (b) fallen.
    (*Sugerencia: Tomar $E = c_0$ y $x_n = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}, 0, \ldots)$.*)

16. (a) Sea $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell^p$ con $1 \leq p \leq \infty$ tal que $x^n \rightharpoonup x$ en la topología $\sigma(\ell^p, \ell^{p'})$. Probar que:

    i. $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en ℓ^p.

    ii. $x_i^n \to x_i$ $(n \to \infty)$ para todo $i \in \mathbb{N}$, donde $x^n = (x_1^n, \ldots, x_i^n, \ldots)$ y $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots)$.

(b) Recíprocamente, Suponer que $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell^p$ $(1 < 1 \leq \infty)$ es tal que i. y ii. valen (para algún límite denotado por x_i). Probar que $x \in \ell^p$ y que $x^n \rightharpoonup x$ en $\sigma(\ell^p, \ell^{p'})$.

17. Para cada $n \in \mathbb{N}$ notamos $e^n = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n}, 0, \ldots)$.

   (a) Probar que $e^n \rightharpoonup 0$ en ℓ^p en la topología $\sigma(\ell^p, \ell^{p'})$ para $1 < p \leq \infty$.

   (b) Probar que no existe ninguna subsucesión $\{e^{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{e^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converja en ℓ^1 para la topología $\sigma(\ell^1, \ell^\infty)$.

   (c) Construir un ejemplo de un espacio de Banach E y una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E^*$ tal que $\|f_n\| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y tal que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no posea ninguna subsucesión que converja en la topología $\sigma(E^*, E)$. ¿Contradice esto la compacidad de B_{E^*} en la topología $\sigma(E^*, E)$?

   (*Sugerencia: Tomar* $E = \ell^\infty$.)

18. Sean $E = \ell^p$ y $F = \ell^q$, $1 < p, q < \infty$. Sea $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que

$$|a(t)| \leq C|t|^{\frac{p}{q}} \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

   Dado $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots) \in \ell^p$, definimos $Ax := (a(x_1), \ldots, a(x_i), \ldots)$.

   (a) Probar que $Ax \in \ell^q$ y que el mapa $x \mapsto Ax$ es continuo de ℓ^p (fuerte) en ℓ^q (fuerte).

   (b) Probar que si $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell^p$ es tal que $x^n \rightharpoonup x$ en $\sigma(\ell^p, \ell^{p'})$, entonces $Ax^n \rightharpoonup Ax$ en $\sigma(\ell^q, \ell^{q'})$.

   (c) Deducir que A es continuo de B_E con la topología $\sigma(E, E^*)$ en B_F con la topología $\sigma(F, F^*)$.

19. Sea E un espacio de Banach.

   (a) Probar que existe un espacio topológico compacto K y una isometría de E en $C(K)$ equipado con la norma usual.

   (*Sugerencia: Tomar* $K = B_{E^*}$ *equipado con* $\sigma(E^*, E)$.)

   (b) Asumiendo que E es separable, probar que existe una isometría de E en ℓ^∞.

20. Sea E un espacio de Banach separable y sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E^*$ una sucesión acotada. Probar directamente (i.e. sin usar la metrizabilidad de B_{E^*}) que existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge en $\sigma(E^*, E)$.

   (*Sugerencia: Usar el método diagonal de Cantor.*)

21. Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita que satisface alguna de las siguientes propiedades:

   (a) E^* es separable o (b) E es reflexivo.

   Probar que existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ tal que

$$\|x_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad x_n \rightharpoonup 0 \text{ en } \sigma(E, E^*).$$

22. El objetivo de este ejercicio es demostrar que si E es un espacio de Banach tal que B_E es metrizable con respecto a la topología $\sigma(E, E^*)$, entonces E^* debe ser separable.

   Sea entonces $d(x, y)$ una métrica en B_E que induce la topología $\sigma(E; E^*)$. Sea

$$U_n := \left\{ x \in B_E \colon d(x, 0) < \frac{1}{n} \right\}.$$

   Sean V_n entornos de 0 para $\sigma(E, E^*)$ tales que $V_n \subset U_n$. Podemos asumir que V_n tiene la forma

$$V_n = \{ x \in E \colon |\langle f, x \rangle| < \varepsilon_n \ \forall f \in \Phi_n \},$$

   donde $\varepsilon_n > 0$ y $\Phi_n \subset E^*$ es un conjunto finito. Sea $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_n$ y notemos por F al subespacio generado por D. Afirmamos que F es denso en E^* con respecto a la topología fuerte. Suponemos, por contradicción, que $\overline{F} \neq E^*$.

   (a) Probar que existen $\phi \in E^{**}$ y $f_0 \in E^*$ tales que

$$\langle \phi, f_0 \rangle > 1, \quad \langle \phi, f \rangle = 0 \ \forall f \in F \quad \text{y } \|\phi\| = 1.$$

   (b) Sea

$$W = \left\{ x \in B_E \colon |\langle f_0, x \rangle| < \frac{1}{2} \right\}.$$

   Probar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $V_{n_0} \subset W$.

   (c) Probar que existe $x_1 \in B_E$ tal que

$$\begin{cases} |\langle f, x_1 \rangle - \langle \phi, f \rangle| < \varepsilon_{n_0} \ \forall f \in \Phi_{n_0}, \\ \\ |\langle f_0, x_1 \rangle - \langle \phi, f_0 \rangle| < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

   (d) Deducir que $x_1 \in V_{n_0}$ y que $\langle f_0, x_1 \rangle > \frac{1}{2}$.

   (e) Concluir el resultado deseado.

23. Sea K un espacio métrico compacto no finito. Probar que $C(K)$ no es reflexivo.

   (*Sugerencia: Sea* $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ *tal que* $a_n \to a$ *y* $a_n \neq a$ $\forall n \in \mathbb{N}$. *Considerar el funcional lineal*

$$\langle f, u \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} u(a_n), \ \ u \in C(K),$$

   y razonar de manera similar a los ejercicios 3 y 4 de la práctica 2.)

24. Sea F un espacio de Banach separable y sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B_F$ denso. Considerar el operador lineal $T \colon \ell^1 \to F$ dado por

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty} x_i a_i \quad \text{donde } x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots) \in \ell^1.$$

   (a) Probar que T es acotado y sobreyectivo.

(b) En este ítem y los que siguen, asumimos que F es de dimensión infinita y que F^* es separable. Probar que T no posee una inversa a derecha.

(*Sugerencia: Usar el ejercicio 21 y que en* ℓ^1 *una sucesión converge en la topología débil* $\sigma(\ell^1, \ell^\infty)$ *si y sólo si converge en la topología fuerte.)*

(c) Deducir que $N(T)$ no tiene complemento en ℓ^1.

(d) Determinar T^*.

25. Sea E un espacio de Banach uniformemente convexo.

(a) Probar que $\forall M > 0$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 \leq \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \delta,$$

$\forall x, y \in E$ con $\|x\|, \|y\| \leq M$ y $\|x - y\| > \varepsilon$.
(*Sugerencia: Argumentar por el absurdo.*)

(b) Misma pregunta reemplazando $\|\cdot\|^2$ por $\|\cdot\|^p$ con $1 < p < \infty$.

26. Sea E un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|$. Asumamos que existe en E una norma equivalente $|\cdot|$ que es uniformemente convexa.

Probar que dado $k > 1$, existe un norma uniformemente convexa $\|\cdot\|_2$ en E tal que

$$\|x\| \leq \|x\|_2 \leq k\|x\| \quad \forall x \in E.$$

(*Sugerencia: Definir* $\|x\|_2^2 = \|x\|^2 + \alpha|x|^2$ *con* $\alpha > 0$ *suficientemente chico y usar el ejercicio anterior.*)

27. *Proyección sobre un conjunto cerrado y convexo en un espacio de Banach uniformemente convexo.*

Sea E un espacio de Banach uniformemente convexo y $C \subset E$ un subconjunto convexo, cerrado, no vacío.

(a) Probar que para todo $x \in E$,

$$\inf_{y \in C} \|x - y\|$$

se alcanza para un único punto en C, denotado por $P_C x$.

(b) Probar que toda sucesión minimizante $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C$ converge fuerte a $P_C x$.

(c) Probar que el mapa $x \mapsto P_C x$ es continuo de E en E con la topología fuerte en ambos casos.

(d) Más precisamente, probar que P_C es uniformemente continuo en conjuntos acotados de E.
(*Sugerencia: Usar el ejercicio 25.*)