Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2019

Práctica 3

Principio de acotación uniforme

Teoremas de la aplicación abierta y del gráfico cerrado

Operadores acotados y no acotados

La mejor defensa es un buen ataque

1. *Continuidad de funciones convexas*

   Sea E un espacio de Banach y $\varphi\colon E \to (-\infty, +\infty]$ una función convexa y semicontinua inferiormente. Se define el *dominio de* φ como

   $$\mathrm{Dom}(\varphi) := \{x \in E\colon \varphi(x) < +\infty\}.$$

   Supongamos que $x_0 \in \mathrm{Dom}(\varphi)^\circ$.

   (a) Probar que existen constantes $R > 0$ y $M \in \mathbb{R}$ tales que

   $$\varphi(x) \le M \qquad \text{para todo } x \in B_R(x_0).$$

   (*Sugerencia: Para un $\rho > 0$ adecuado, considerar los conjuntos*

   $$F_n = \{x \in E\colon \|x - x_0\| \le \rho \ y\ \varphi(x) \le n\}.)$$

   (b) Probar que para todo $r < R$, existe $L \ge 0$ tal que

   $$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \le L\|x_1 - x_2\|,$$

   para todo $x_1, x_2 \in E$ con $\|x_i - x_0\| \le r$, $i = 1.2$.
   (*Sugerencia: Tomar* $L = \frac{2|M-\varphi(x_0)|}{R-r}$.)

2. Sea E un espacio vectorial y $p\colon E \to \mathbb{R}$ una función con las siguientes propiedades:

   (a) $p(x + y) \le p(x) + p(y)$ para todo $x, y \in E$,

   (b) para cada $x \in E$ fijo, la función $\lambda \mapsto p(\lambda x)$ es continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$,

   (c) para toda sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ tal que $p(y_n) \to 0$, entonces $p(\lambda y_n) \to 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ tal que $p(x_n) \to 0$ y $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ acotada. Probar que $p(0) = 0$ y que $p(\alpha_n x_n) \to 0$.

   (*Sugerencia: Dado $\varepsilon > 0$ considerar los conjuntos*

   $$F_n = \{\lambda \in \mathbb{R}\colon |p(\lambda x_k)| \le \varepsilon,\ \forall k \ge n\}.)$$

   Deducir que si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ es tal que $p(x_n - x) \to 0$ para algún $x \in E$, y $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es tal que $\alpha_n \to \alpha$, entonces $p(\alpha_n x_n) \to p(\alpha x)$.

3. Sean E y F dos espacios de Banach y sea $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(E, F)$. Asumamos que para cada $x \in E$, $\{T_n x\}_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ converge a un límite denotado por Tx. Probar que si $x_n \to x$ en E, entonces $T_n x_n \to Tx$ en F.

4. Sean E y F dos espacios de Banach y sea $a\colon E \times F \to \mathbb{R}$ una forma bilineal tal que

   (a) para cada $x \in E$ fijo, el mapa $y \mapsto a(x, y)$ es continuo;

   (b) para cada $y \in F$ fijo, el mapa $x \mapsto a(x, y)$ es continuo.

   Probar que existe una constante $C > 0$ tal que

$$|a(x, y)| \leq C\|x\|\|y\| \qquad \forall x \in E, \quad \forall y \in F.$$

   (*Sugerencia: Introducir un operador lineal* $T\colon E \to F^*$ *y probar que es acotado.*)

5. Sea E un espacio de Banach y $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\varepsilon_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E^*$ con la siguiente propiedad: existe $r > 0$, tal que para todo $x \in E$, $\|x\| < r$, existe una constante $C(x) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle f_n, x\rangle \leq \varepsilon_n \|f_n\| + C(x) \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Probar que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.

   (*Sugerencia: Introducir* $g_n = f_n/(1 + \varepsilon_n\|f_n\|)$.)

6. *Operadores monótonos no lineales localmente acotados*

   Sea E un espacio de Banach y sea $D(A) \subset E$ arbitrario. Un mapa (no lineal) $A\colon D(A) \subset E \to E^*$ se dice *monótono* si verifica

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq 0 \qquad \forall x, y \in D(A).$$

   (a) Sea $x_0 \in D(A)^\circ$. Probar que existen dos constantes $R > 0$ y C tales que

$$\|Ax\| \leq C \quad \forall x \in D(A) \text{ con } \|x - x_0\| < R.$$

   (*Sugerencia: Argumentar por el absurdo y construir* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ *tal que* $x_n \to x_0$ *y* $\|Ax_n\| \to \infty$. *Elegir* $r > 0$ *tal que* $B_r(x_0) \subset D(A)$. *Usar la monotonía de* A *en* x_n *y* $x_0 + x$ *con* $\|x\| < r$. *Aplicar el ejercicio 5.*)

   (b) Probar la misma conclusión del ítem anterior para $x_0 \in \operatorname{conv}(D(A))^\circ$, donde $\operatorname{conv}(D)$ es la cápsula convexa de D definida como

$$\operatorname{conv}(D) := \left\{ \sum_{i\in I} t_i x_i \colon I \text{ finito},\ x_i \in D,\ t_i \geq 0,\ \sum_{i\in I} t_i = 1 \right\}.$$

   (c) Extender las conclusiones del ítem (a) al caso de A *multivaluado*, i.e. para cada $x \in D(A)$, Ax es un subconjunto no vacío de E^* y la monotonía se define como

$$\langle f - g, x - y\rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in D(A),\ \forall f \in Ax,\ \forall g \in Ay.$$

7. Sea $\alpha = \{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $1 \leq p \leq \infty$. Asumamos que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n||x_n| < \infty$ para todo $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$. Probar que $\alpha \in \ell^{p'}$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

8. Sea E un espacio de Banach y $T\colon E \to E^*$ un operador lineal tal que

$$\langle Tx, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in E.$$

   Probar que T es acotado.

   (*Sugerencia: Usar el ejercicio 6 o el Teorema del gráfico cerrado.*)

9. Sea E un espacio de Banach y $T\colon E \to E^*$ un operador lineal tal que
$$\langle Tx, y\rangle = \langle Ty, x\rangle \quad \forall x, y \in E.$$
Probar que T es acotado.

10. Sean E y F dos espacios de Banach y $T \in \mathcal{L}(E, F)$ suryectiva.
    (a) Sea $M \subset E$ arbitrario. Probar que $T(M)$ es cerrado en F si y sólo si $M + N(T)$ es cerrado en E.
    (b) Deducir que si M es un subespacio cerrado en E y $\dim N(T) < \infty$, entonces $T(M)$ es cerrado.

11. Sea E un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(E, \ell^1)$ suryectiva. Probar que entonces existe $S \in \mathcal{L}(\ell^1, E)$ tal que $T \circ S = I_{\ell^1}$. Es decir, S tiene una inversa a derecha de T.
(*Sugerencia: Definir S explícitamente sobre la base canónica de ℓ^1.*)

12. Sean E y F dos espacios de Banach y $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que $R(T)$ es cerrado y $\dim N(T) < \infty$. Sea $|\cdot|$ una norma en E más débil de la usual, i.e. $|x| \le M\|x\|_E$ $\forall x \in E$.
Demostrar que existe una constante C tal que
$$\|x\|_E \le C(\|Tx\|_F + |x|) \quad \forall x \in E.$$
(*Sugerencia: Argumentar por el absurdo.*)

13. Sean E y F dos espacios de Banach. Probar que el conjunto
$$\Omega := \{T \in \mathcal{L}(E, F)\colon T \text{ admite una inversa a izquierda}\}$$
es abierto en $\mathcal{L}(E, F)$.
(*Sugerencia: Probar primero que el conjunto*
$$\mathcal{O} := \{T \in \mathcal{L}(E, F)\colon T \textit{ es biyectiva}\}$$
es abierto en $\mathcal{L}(E, F)$.)

14. Sean E y F dos espacios de Banach.
    (a) Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Probar que $R(T)$ es cerrado si y sólo si existe una constante C tal que
    $$\operatorname{dist}(x, N(T)) \le C\|Tx\| \quad \forall x \in E.$$
    (*Sugerencia: Usar el cociente $E/N(T)$.*)
    (b) Sea $A\colon D(A) \subset E \to F$ un operador cerrado no acotado. Probar que $R(A)$ es cerrado si y sólo si existe una constante C tal que
    $$\operatorname{dist}(u, N(A)) \le C\|Au\| \quad \forall u \in D(A).$$
    (*Sugerencia: Considerar el operador $T\colon E_0 \to F$, donde $E_0 = D(A)$ con la norma del gráfico y $T = A$.*)

15. Sean E_1, E_2 y F tres espacios de Banach. Sean $T_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$, $i = 1, 2$, tales que

$$R(T_1) \cap R(T_2) = \{0\} \qquad \text{y} \qquad R(T_1) + R(T_2) = F.$$

Probar que $R(T_i)$ es cerrado, $i = 1, 2$.

(*Sugerencia: Aplicar el ejercicio 10 al mapa* $T\colon E_1 \times E_2 \to F$ *definido como* $T(x_1, x_2) = T_1 x_1 + T_2 x_2$.)

16. Sea E un espacio de Banach y sean G, L dos subespacios cerrados de E. Asumamos que existe una constante C tal que

$$\operatorname{dist}(x, G \cap L) \leq C \operatorname{dist}(x, L) \quad \forall x \in G.$$

Probar que $G + L$ es cerrado.

17. Sea $E = C([0,1])$ con la norma usual del supremo. Consideremos el operador $A\colon D(A) \subset E \to E$ definido por

$$D(A) = C^1([0,1]) \qquad \text{y} \qquad Au = u' = \frac{du}{dt}.$$

   (a) Probar que $\overline{D(A)} = E$.
   (b) ¿Es A cerrado?
   (c) Considerar el operador $B\colon D(B) \subset E \to E$ definido por

$$D(B) = C^2([0,1]) \qquad \text{y} \qquad Bu = u' = \frac{du}{dt}.$$

   ¿Es B cerrado?

18. Sean E y F dos espacios de Banach y sea $A\colon D(A) \subset E \to F$ un operador no acotado densamente definido.

   (a) Probar que $N(A^*) = R(A)^\perp$ y $N(A) \subset {}^\perp R(A^*)$.
   (b) Asumiendo que A es cerrado, probar que $N(A) = {}^\perp R(A^*)$.
   (*Sugerencia: Si* $u \in {}^\perp R(A^*)$ *es tal que* $(u, 0) \notin G(A)$ *usar el Teorema de Hahn-Banach para llegar a una contradicción.*)

19. Sea E un espacio de Banach y $A\colon D(A) \subset E \to E^*$ un operador no acotado densamente definido.

   (a) Asumamos que existe una constante C tal que

$$\langle Au, u \rangle \geq -C\|Au\|^2 \quad \forall u \in D(A). \tag{1}$$

   Probar que $N(A) \subset N(A^*)$.
   (b) Recíprocamente, si asumimos que $N(A) \subset N(A^*)$ y, adicionalmente, asumimos que A es cerrado con $R(A)$ cerrado, probar que existe una constante C tal que (1) se verifica.

20. Sean E y F dos espacios de Banach. Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ y $A\colon D(A) \subset E \to F$ un operador no acotado densamente definido y cerrado. Consideremos el operador $B\colon D(B) \subset E \to F$ definido por

$$D(B) = D(A), \qquad B = A + T.$$

(a) Probar que B es cerrado.

(b) Probar que $D(B^*) = D(A^*)$ y $B^* = A^* + T^*$.

21. Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita. Fijemos $a \in E$, $a \neq 0$ y un funcional lineal discontinuo $f\colon E \to \mathbb{R}$. Consideremos el operador $A\colon E \to E$ definido por

$$D(A) = E, \qquad Ax = x - f(x)a.$$

   (a) Determinar $N(A)$ y $R(A)$.

   (b) ¿Es A cerrado?

   (c) Determinar A^* (definir con cuidado $D(A^*)$).

   (d) Determinar $N(A^*)$ y $R(A^*)$.

   (e) Comparar $N(A)$ con ${}^{\perp}R(A^*)$ y $N(A^*)$ con $R(A)^{\perp}$.

   (f) Comparar con los resultados del ejercicio 18.

22. El propósito de este ejercicio es construir un operador no acotado $A\colon D(A) \subset E \to E$ que sea cerrado y densamente definido pero que $D(A^*) \subset E^*$ no sea denso.

   Sea $E = \ell^1$ con lo que $E^* = \ell^\infty$. Consideremos el operador $A\colon D(A) \subset E \to E$ definido por

$$D(A) = \{u = \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1 \colon \{nu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1\} \quad \text{y} \quad Au = \{nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

   (a) Probar que A es cerrado y densamente definido.

   (b) Calcular $D(A^*)$, A^* y $\overline{D(A^*)}$.

23. Sea $E = \ell^1$ con lo que $E^* = \ell^\infty$. Considerar el operador $T \in \mathcal{L}(E)$ definido por

$$Tu = \left\{\frac{1}{n}u_n\right\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad \forall u = \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1.$$

   Determinar $N(T)$, $N(T)^{\perp}$, T^*, $R(T)$ y $\overline{R(T^*)}$.

24. Sean E, F y G tres espacios de Banach. Sea $A\colon D(A) \subset E \to F$ un operador no acotado densamente definido y sea $T \in \mathcal{L}(F,G)$. Consideremos $B\colon D(B) \subset E \to G$ definido por $D(B) = D(A)$ y $B = T \circ A$.

   (a) Determinar B^*.

   (b) Dar un ejemplo donde B no sea cerrado aunque A si lo sea.

25. Sean E, F y G tres espacios de Banach.

   (a) Sea $T \in \mathcal{L}(E,F)$ y $S \in \mathcal{L}(F,G)$. Probar que

$$(S \circ T)^* = T^* \circ S^*.$$

   (b) Probr que si $T \in \mathcal{L}(E,F)$ es biyectiva, entonces T^* es biyectiva y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

26. Sean E y F dos espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Asumamos que $R(T)$ tiene codimensión finita. i.e. existe $X \subset F$ subespacio de dimensión finita tal que $X + R(T) = F$ y $X \cap R(T) = \{0\}$.

   Probar que $R(T)$ es cerrado.