Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2019

Práctica 1

Espacios de Banach

Los equipos se arman de atrás para adelante

1. (a) Si $1 \leq p \leq \infty$, $s_f = \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p \colon x_n = 0$ salvo finitos $n \in \mathbb{N}\}$, entonces s_f es un subespacio de ℓ^p no cerrado (más aún, es denso).

   (b) Sean E un espacio vectorial normado, $S \subset E$ un subespacio, entonces $\overline{S}$ es un subespacio.

   (c) Sean E un espacio de Banach, S un subespacio cerrado de E, entonces S, con la norma inducida por E, es un espacio de Banach.

2. (a) Sea K un espacio topológico compacto, entonces $C(K) = \{f \colon K \to \mathbb{C}$ continuas$\}$ con la norma
$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in K} |f(x)|$$
   es un espacio de Banach.

   (b) Si K es un compacto de $\mathbb{C}^n$, $C(K)$ es separable.

3. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Son equivalentes:

   (a) E es Banach

   (b) $\{x \in E \colon \|x\| \leq 1\}$ es completo

   (c) $\{x \in E \colon \|x\| = 1\}$ es completo.

4. Si E es un espacio vectorial normado de dimensión finita, demostrar que $B(0,1) = \{x \in E \colon \|x\| \leq 1\}$ es compacta.

   Definición: Sean E un espacio vectorial, $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos normas definidas sobre E. Decimos que las normas son equivalentes si y sólo si existe una constante $\lambda > 1$ tal que
$$\lambda^{-1}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \lambda\|x\|_1,$$
   para todo $x \in E$.

5. (a) Dos normas definidas sobre un espacio vectorial son equivalentes si y sólo si cada sucesión que converge con una, converge con la otra.

   (b) Si E es un espacio vectorial de dimensión finita, todas las normas definidas sobre E son equivalentes.

   (c) Si E es un espacio vectorial de dimensión finita, cualquier norma que se defina sobre E hace de E un espacio de Banach.

   (d) Sean E un espacio vectorial normado, $S \subset E$ un subespacio de dimensión finita. Entonces S es cerrado.

6. Sean E un espacio vectorial normado, $F \subset E$ un subespacio de dimensión finita, entonces para todo $x \notin F$, existe $y_0 \in F$ que realiza la distancia, o sea
$$\|x - y_0\| = \operatorname{dist}(x, F) = \inf_{y\in F} \|x - y\|.$$
   Sugerencia. Ver que $y_0 \in S = \{y \in F \colon \|y\| \leq 2\|x\|\}$.

7. *Lema de Riesz:* Sean E un espacio vectorial normado, $F \subset E$ un subespacio cerrado propio y $0 < a < 1$. Entonces existe $x_a \in E$, $\|x_a\| = 1$ tal que $\operatorname{dist}(x_a, F) \geq a$.

   (Sug: Sea $x \in E \setminus F$, $d = \operatorname{dist}(x, F) > 0$. Tomar $y_0 \in F$ tal que $0 < \operatorname{dist}(x, y_0) < \frac{d}{a}$ y probar que $x_a = \frac{x-y_0}{\|x-y_0\|}$ es el que sirve).

8. Sea E un espacio vectorial normado. Probar que $B(0,1)$ es compacta si y sólo si $\dim E < \infty$.

9. (a) Sean E un espacio vectorial normado, $S \subset E$ un subespacio. Probar que S tiene interior no vacío si y sólo si $S = E$.

   (b) Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita. Entonces $\dim E > \aleph_0$.

10. Demostrar que un espacio de Banach tiene dimensión finita si y sólo si todo subespacio es cerrado.

11. Sea E un espacio vectorial normado, E es de Banach si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ vale que: $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge en E.

12. Sean E y F espacios vectoriales normados. En $E \times F$, definimos $\|(x,y)\| = \|x\|_E + \|y\|_F$. Probar los siguientes enunciados.

    (a) $(E \times F, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado.

    (b) Si E y F son espacios de Banach, $E \times F$ resulta un espacio de Banach.

    (c) La inyección $J_E \colon E \to E \times F$ y la proyección $P_E \colon E \times F \to E$ dadas por $J_E(x) = (x, 0)$ y $P_E(x,y) = x$ son ambas continuas. Lo mismo vale para J_F y P_F.

13. Sean E un espacio de Banach, $S \subset E$ un subespacio cerrado.

    (a) Probar que E/S es un espacio vectorial.

    (b) Si definimos en E/S la norma $\|[x]\| = \operatorname{dist}(x, S)$, probar que está bien definida y que es, efectivamente, una norma.

    (c) Si $\Pi \colon E \to E/S$ es la proyección al cociente $\Pi(x) = [x]$, ver que Π es lineal, que $\|\Pi\| \leq 1$ y que Π es abierta.

    (d) Probar que E/S es un espacio de Banach.

14. Sean E un espacio de Banach, $S, T \subset E$ subespacios cerrados con $\dim T < \infty$ entonces $S + T$ es cerrado.

15. Probar que los siguientes espacios son Banach con las normas indicadas. Por Ω entendemos un dominio abierto con clausura compacta en $\mathbb{R}^n$.

    (a) $C^1(\overline{\Omega})$, $\|f\| = \|f\|_\infty + \sum_{i=1}^{n} \|f_{x_i}\|_\infty$.

    (b) $C^r(\overline{\Omega})$, $\|f\| = \|f\|_\infty + \sum_{i=1}^{n} \|f_{x_i}\|_\infty + \cdots + \sum_{i_1,\ldots,i_r=1}^{n} \|f_{x_{i_1} \cdots x_{i_r}}\|_\infty$.

    (c) $\operatorname{Lip}(\overline{\Omega})$, $\|f\| = \|f\|_\infty + \sup_{x,y \in \Omega} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$.

    (d) $C^\alpha(\overline{\Omega})$, $\|f\| = \|f\|_\infty + \sup_{x,y \in \Omega} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.
    ¿Qué sucede si $\alpha > 1$?

    (e) $BV([0,1])$, $\|f\| = \|f\|_\infty + \sup_{0=a_0<\cdots<a_n=1} \sum_{i=0}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)|$