Análisis Complejo - Primer Cuatrimestre de 2019

Práctica N°9. Productos infinitos

1. Probar que
$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

2. Para $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z|<1$, probar que
$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+z^{2^n}\right)=\frac{1}{1-z}.$$

3. Probar que
$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^n)$$
converge uniforme sobre compactos en $B(0,1)$, y por lo tanto define una función holomorfa en $B(0,1)$.

4. Probar que
$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2z-1}{n^2z+1}$$
define una función holomorfa en $\{\mathrm{Re}(z)>0\}$. Hallar los ceros de esta función y sus multiplicidades.

5. Probar que
$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{z}{2^n}\right)$$
define una función entera. Hallar los ceros de esta función y sus multiplicidades.

6. Probar que
$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$$
define una función entera.

7. *Funciones holomorfas con ceros prefijados en la bola unidad.*

   (a) Sean $a, z \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}$ tales que $0 < |a| < 1$ y $|z| \leq r < 1$. Probar que
   $$\left| \frac{a + |a|z}{(1 - \overline{a}z)a} \right| \leq \frac{1}{1 - r}.$$

   (b) Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ una sucesión tal que $0 < |a_n| < 1$ y $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |a_n|) < \infty$. Probar que
   $$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \cdot \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n}z}$$
   define una función holomorfa en $B(0,1)$ y que $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in B(0,1)$. ¿Cuales son los ceros de f?

8. Demostrar que existe una función $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ holomorfa que no se extiende de manera holomorfa a ningún abierto conexo que contenga a $B(0,1)$ propiamente. (Sugerencia: usar el ejercicio anterior.)

9. Sea $g(z) = \operatorname{sen}(\pi z)$. Teniendo en cuenta que $\frac{g'(z)}{g(z)} = \pi \operatorname{cotg}(\pi z)$, demostrar que
   $$\frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

10. *Función Gamma.*

   (a) Sea z un número real positivo. Sabiendo que para todos $t \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $0 < t < n$ vale que
   $$\left| e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right| \leq \frac{e^{-t+1}t^2}{2n},$$
   probar que
   $$\Gamma(z) = \lim_{n \to \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt.$$

   (b) Integrando por partes n veces, probar que
   $$\Gamma(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{n^z}{z} \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+z}.$$

   (c) Sea γ la constante de Euler, definida por
   $$\gamma = \lim_{n \to \infty} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n).$$
   Probar que
   $$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+z}\right) e^{\frac{z}{k}}$$
   y deducir que el mismo resultado vale para todo $z \in \{\operatorname{Re}(z) > 0\}$.

   (d) Notar que la fórmula del ítem anterior extiende la definición de Γ al conjunto $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. Probar que para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ vale que
   $$\Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}.$$

11. (a) Demostrar que la función zeta de Riemann (definida en el ejercicio 17 de la práctica 3) satisface que $\zeta(s) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-p_k^{-s}}$ donde $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$ es la sucesión creciente formada por todos los primos positivos, para $\mathrm{Re}(s) > 1$.

(b) Probar que la función zeta extendida a $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 0, z \neq 1\}$ como en el ejercicio 19 (c) de la práctica 3 tiene en $z = 1$ un polo simple de residuo 1.

(c) También es posible expresar la función zeta como una integral impropia:

$$\zeta(s) = s \int_1^{\infty} [t] t^{-s-1}\, dt \quad \mathrm{Re}(s) > 1$$

donde $[t]$ es la función parte entera del número real t. Similarmente su extensión a $\mathrm{Re}(s) > 0$ puede expresarse por:

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = 1 + s \int_1^{\infty} ([t] - t) t^{-s-1}\, dt \quad \mathrm{Re}(s) > 0$$

Sugerencia: Pruebe la identidad cuando $\mathrm{Re}(s) > 0$ y use el principio de continuación analítica. El ítem anterior puede deducirse también de esta fórmula.

(d) Deducir que existen infinitos números primos.

12. Otros ejemplos de productos de Euler: Verificar las siguientes fórmulas:

i)

$$\zeta(s)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-p_k^{-s})^2} \quad \mathrm{Re}(s) > 1$$

donde $d(n)$ denota la cantidad de divisores primos de n.

ii)

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1-p_k^{-s}}{1-p_k^{1-s}} \quad \mathrm{Re}(s) > 2$$

donde $\varphi(n)$ denota la función de Euler, que cuenta la cantidad de enteros k con $1 \leq k \leq n$ tales que k es coprimo con n.

Sugerencia: tanto $d(n)$ como $\varphi(n)$ son funciones multiplicativas, esto es satisfacen que

$$d(n \cdot m) = d(n) \cdot d(m)$$

$$\varphi(n \cdot m) = \varphi(n) \cdot \varphi(m)$$

cuando n y m son coprimos.