Análisis Complejo - Primer Cuatrimestre de 2019

Práctica N°4. Funciones Elementales. Integración.

Funciones Elementales

1. Para $z \in \mathbb{C}, z = x + i\,y$, se define $e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$.

   (a) Demostrar que $e^0 = 1$ y para todo $z, w \in \mathbb{C}$, $e^{w+z} = e^w e^z$ y $\dfrac{e^w}{e^z} = e^{w-z}$.

   (b) Describir los z tales que $e^z = 1$.

   (c) Demostrar que si $e^z = e^w$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $z = w + 2k\pi i$. Deducir que e^z es una función periódica de período $2\pi\, i$.

   (d) Probar que para todo $z \in \mathbb{C}$, $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$.

2. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$.

   (a) Hallar la imagen por f del conjunto $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Im}(z) < 2\pi\}$.

   (b) Hallar la imagen por f del primer cuadrante.

   (c) Mostrar que la imagen de la recta $\{t + it \mid t \in \mathbb{R}\}$ es una espiral.

3. Para $z \in \mathbb{C}$ se define

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

   Comprobar las siguientes identidades para todo $z \in \mathbb{C}$:

$$\cos^2(z) + \operatorname{sen}^2(z) = 1 \quad \text{y} \quad e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z.$$

4. Mostrar que $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ tienen período 2π.

5. Mostrar que los únicos valores de z para los cuales $\cos z = 0$ y $\operatorname{sen} z = 0$ son los valores reales usuales.

6. Probar que para todo $z \in \mathbb{C}$, $\cos(\overline{z}) = \overline{\cos(z)}$ y $\operatorname{sen}(\overline{z}) = \overline{\operatorname{sen}(z)}$.

7. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $\cos z \in \mathbb{R}$ y los $z \in \mathbb{C}$ tales que $\operatorname{sen} z \in \mathbb{R}$.

8. Probar que $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ son funciones sobreyectivas de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$. Hallar todas las soluciones de la ecuación $\cos z = \frac{5}{4}$.

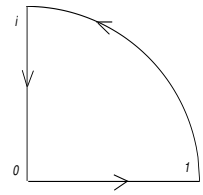
9. Sean $a, b, b' \in \mathbb{R}$. Probar que si $|b| < |b'|$, entonces $|\cos(a + bi)| < |\cos(a + b'i)|$ y $|\operatorname{sen}(a + bi)| < |\operatorname{sen}(a + b'i)|$.

Integración

10. Calcular

    i) $\int_\gamma \overline{z} dz$ para $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = e^{it}$,

ii) $\int_\gamma |z|^2 z dz$ para la siguiente curva γ:



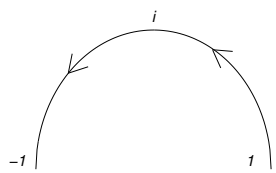
11. Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva. Denotamos por $-\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ a la curva dada por $-\gamma(t) = \gamma(a + b - t)$. Probar que

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz.$$

12. Sean $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ y sea $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $T(z) = az + b$. Dadas una curva γ y $z_0 \notin \gamma$, probar que

$$\int_{T\circ\gamma} \frac{dz}{z - T(z_0)} = \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}.$$

13. Sea γ la curva:



Demostrar que

$$\Big| \int_\gamma \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^2} dz \Big| \leq \pi \frac{1 + e}{2}.$$

14. Sea $\gamma_r : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma_r(t) = re^{it}$. Probar que $\lim\limits_{r\to+\infty} \displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$.

15. Sea γ como en el ejercicio 13. Calcular $\int_\gamma \cos(z)\, dz$.

16. Sean $r \in \mathbb{R}_{>0}$, $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ tales que $|z_1 - z_0| \neq r$ y $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$.

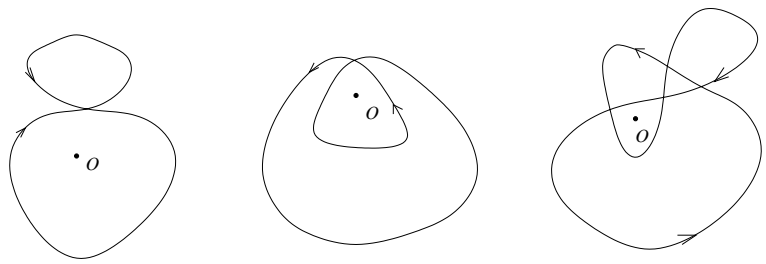
    i) Calcular $\int_\gamma (z - z_1)^n\, dz$ si n es un entero distinto de -1.

    ii) Probar que si $|z_1 - z_0| < r$, entonces $\int_\gamma \dfrac{dz}{z - z_1} = 2\pi i$.

    iii) Probar que si $|z_1 - z_0| > r$, entonces $\int_\gamma \dfrac{dz}{z - z_1} = 0$.

17. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $f_n, f : \Omega \to \mathbb{C}$. Demostrar que si $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ en una curva $\gamma \subseteq \Omega$ entonces $\int_\gamma f_n(z)dz \longrightarrow \int_\gamma f(z)dz$.

18. Evaluar $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z} dz$ siendo γ alguna de las siguientes curvas:



19. Encontrar todos los posibles valores de $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}$, donde γ es una curva diferenciable simple cerrada que no pasa por $\pm i$.

20. Sea γ la curva cuya imagen es la elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ parametrizada por $\gamma(t) = a\cos t + i\, b\,\operatorname{sen} t$ con $0 \le t \le 2\pi$.
Calcular $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z}$ y deducir que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t} = \frac{2\pi}{ab}$.

21. Sea γ una curva cerrada y $w \in \mathbb{C}$ tal que $w \notin \gamma$. Denotamos por $\eta(\gamma, w)$ al índice de la curva γ con respecto a w. Probar:

    i) $\eta(\gamma, w) = -\eta(-\gamma, w)$ donde $-\gamma$ se define como en el ejercicio 11.
    ii) $\eta(\gamma, w) = 0$ para todo $w \notin \{z : |z| \le \max|\gamma|\}$.
    iii) $\eta(\gamma, w)$ es continua.
    iv) $\eta(\gamma, w)$ es constante como función de w en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

22. Sean $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva diferenciable a trozos y $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto. Sea $\varphi : \gamma \times \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua y $g : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por $g(z) = \int_\gamma \varphi(w, z)dw$. Probar que:

    (a) g es continua.
    (b) Si para todo $w \in \gamma$, la función $\varphi(w, -) : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa y además $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}(w, z)$ resulta continua en w y z, entonces g es holomorfa y
    $$g'(z) = \int_\gamma \frac{\partial\varphi}{\partial z}(w, z)\, dw$$
    .

23. (a) Sean $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva diferenciable a trozos y $f : \gamma \to \mathbb{C}$ una función continua.
    Definimos $\varphi : \gamma \times (\mathbb{C} \setminus \gamma) \to \mathbb{C}$ por $\varphi(w, z) = \dfrac{f(w)}{w - z}$ y $g : \mathbb{C} \setminus \gamma \to \mathbb{C}$ por $g(z) = \int_\gamma \varphi(w, z)dw$. Probar que g es holomorfa y
    $$g^{(n)}(z) = n! \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}}\, dw.$$
    (b) Deducir que si γ es cerrada y f es holomorfa, entonces se tiene que
    $$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i\, \eta(\gamma, z)} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw.$$

24. Calcular:

i) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z-2}dz, \quad \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = 4e^{it}$,

ii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{z+1}dz, \quad \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = 1 + e^{ikt} \quad (k \in \mathbb{Z})$,

iii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\operatorname{sen} z}{z^3}dz, \quad \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = e^{it}$,

iv) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\log(1+z)}{(z-\frac{1}{2})^3}dz, \quad \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = \dfrac{2}{3}e^{it}$,

v) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos(\pi z)}{(z^2-1)^2}dz, \quad \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = 1 + e^{ikt} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

25. Probar que $f(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt^2}dt$ es una función holomorfa en $\operatorname{Re}(z) > 0$.

26. Probar que si $f(z)$ es continua en el disco cerrado $|z| \leq r$ y holomorfa en el disco abierto $|z| < r$, se tiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w-z}dw$$

para todo $|z| < r$.