Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

Análisis Complejo - Primer Cuatrimestre de 2019

Práctica N°1. Números Complejos. Esfera de Riemann. Homografías

1. Expresar los siguientes números complejos en la forma $a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$:

   a) $(i+1)(i-1)(i+3)$,
   b) $\dfrac{2+i}{2-i}$,
   c) $(1+i)^{65} + (1-i)^{65}$,
   d) $\dfrac{1+i}{i}$,
   e) $(1+i)^{100}$,
   f) $\dfrac{1}{-1+3i}$.

2. Determinar las partes reales e imaginarias de los siguientes números complejos, en términos de las de z:

   a) z^2,
   b) z^{-1},
   c) z^{-2},
   d) z^4,
   e) $\dfrac{1+z}{1-z}$,
   f) $\dfrac{i-z}{1+iz}$,
   g) $\dfrac{z}{z+1}$,

3. Sean z y w dos números complejos. Demostrar que:

   a) $\overline{z} = z$ si y solo si $z \in \mathbb{R}$,
   b) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$,
   c) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$,
   d) $\operatorname{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$,
   e) $\operatorname{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.

4. Probar que si $z_0 \in \mathbb{C}$ es raíz de $a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$, entonces $\overline{z}_0 \in \mathbb{C}$ es raíz de $\overline{a}_n X^n + \overline{a}_{n-1}X^{n-1} + \cdots + \overline{a}_0 = 0$. Deducir que si $P(X)$ es un polinomio con coeficientes reales y $z_0 \in \mathbb{C}$ es raíz de $P(X)$, entonces $\overline{z}_0 \in \mathbb{C}$ también lo es.

5. Para $z \in \mathbb{C}$, se define $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$. Probar que:

   a) Si $z = x + iy$, $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$,
   b) $|zw| = |z|\,|w|$ y si $w \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$,
   c) $-|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z|$ y $-|z| \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z|$,
   d) $|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w})$ y $|z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}(z\overline{w})$,
   e) $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\big(|z|^2 + |w|^2\big)$,
   f) $|z+w| \leq |z| + |w|$ y $|z-w| \geq |z| - |w|$.

   Interpretar geométricamente la propiedad (e), también conocida como "Ley del paralelogramo".

6. Describir geométricamente los siguientes subconjuntos de $\mathbb{C}$:

   a) $|z - i + 3| = 5$,
   b) $|z - i + 3| \leq 5$,
   c) $\operatorname{Re}(2z + 3) \geq 0$,
   d) $\operatorname{Re}((1 + 2i)z) \geq 0$.

7. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y sea $c \in \mathbb{C}$, probar que $\alpha z\overline{z} + cz + \overline{cz} + \beta = 0$ representa una circunferencia, o una recta, o un punto o al conjunto vacío. Probar además que toda circunferencia o recta puede representarse de esta forma.

8. Probar que $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definida por $d(z, w) = |z - w|$ es una métrica y en consecuencia $(\mathbb{C}, d)$ es un espacio métrico.

9. Definimos $d_1, d_\infty : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ por

   a) $d_1(z, w) = |x - a| + |y - b|$, donde $z = x + iy$ y $w = a + ib$.
   b) $d_\infty(z, w) = \text{máx}\{|x - a|, |y - b|\}$, donde $z = x + iy$ y $w = a + ib$.

   Demostrar que $(\mathbb{C}, d_1)$ y $(\mathbb{C}, d_\infty)$ son espacios métricos.

10. Para $z \in \mathbb{C}$ y $r > 0$ fijos, describir geométricamente los conjuntos:

    - $B(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : d(z, w) < r\}$,
    - $B_1(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : d_1(z, w) < r\}$,
    - $B_\infty(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : d_\infty(z, w) < r\}$.

11. **Transformaciones lineales y representación matricial de los números complejos.**

    a) Probar que toda transformación $\mathbb{R}$-lineal $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ puede escribirse de forma única como

    $$T(z) = \mu z + \lambda \overline{z}$$

    donde $\mu, \lambda \in \mathbb{C}$ y determinar estos números en función de T. Probar que T es $\mathbb{C}$-lineal si y solo si $\lambda = 0$, y en tal caso, T resulta la multiplicación por $T(1)$.

    b) Fijemos una matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ con coeficientes reales, y consideremos la transformación $\mathbb{R}$-lineal $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que define A. Probar que son equivalentes:

       - T es $\mathbb{C}$-lineal,
       - $a_{11} = a_{22}$ y $a_{21} = -a_{12}$.

       y en tal caso T es la multiplicación por $z_A = a_{11} + ia_{21}$.

    c) Deducir que la asignación del inciso anterior

    $$A \in \mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \quad a, b \in \mathbb{R} \right\} \mapsto z_A \in \mathbb{C}$$

    define una biyección de modo que $z_{A+B} = z_A + z_B$, $z_{AB} = z_A z_B$ y $z_{Id} = 1$. Luego $\mathcal{M}$ resulta un cuerpo, con la suma y la multiplicación usual de matrices, isomorfo a $\mathbb{C}$.

Forma polar y raíces.

12. Escribir los siguientes números complejos en forma polar:

a) $1+i$, b) $-5i$, c) -3.

13. Escribir los siguientes números complejos en la forma $a+ib$:

    a) $3e^{i\frac{\pi}{4}}$, b) $e^{-i\pi}$, c) $\pi e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

14. Mostrar que si $\alpha = re^{i\theta}$ ($r \in \mathbb{R}_+, \theta \in \mathbb{R}$) es la *forma polar* del complejo α, entonces la transformación lineal T_α del ejercicio 11. se factoriza como una rotación en el plano complejo en el ángulo θ, seguida de una dilatación de factor r. Deducir que T_α preserva los ángulos entre los vectores.

15. Hallar todas las transformaciones $\mathbb{R}$-lineales $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que preservan los ángulos entre los vectores. ¿Son todas de la forma T_α para algún $\alpha \in \mathbb{C}$?

16. Para $n = 2, 3, 4, 5$, dibujar todos los números complejos z tales que $z^n = 1$.

17. Calcular siguientes raíces:

    a) $(-1+i)^{1/3}$, c) $i^{2/3}$, e) $(-2\sqrt{3}-2i)^{1/4}$,
    b) $(\sqrt{3}+3i)^{1/2}$, d) $64^{1/6}$, f) $(-4+4i)^{1/5}$.

18. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Demostrar que hay n números complejos distintos tales que $z^n = \alpha$.

19. Hallar todas las soluciones en $\mathbb{C}$ de la ecuación $iz^2 + (3-i)z - (1+2i) = 0$.

20. Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Demostrar que $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ y $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

21. Sea $z = e^{2\pi i/n}$ para un entero $n \geq 2$. Demostrar que $1 + z + \cdots + z^{n-1} = 0$.

22. Sea $z \neq 1$. Probar que $1 + z + \cdots + z^n = \dfrac{z^{n+1}-1}{z-1}$. Para $0 < \theta < 2\pi$, dar una fórmula para $1 + \cos\theta + \cdots + \cos n\theta$.

Plano Complejo ampliado. Esfera de Riemann.

23. Sean $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y $S = S^2$ (la esfera en $\mathbb{R}^3$ de radio 1 y centro en $(0,0,0)$). Sea $N = (0,0,1) \in S$, definimos la proyección estereográfica $\theta : S \to \widehat{\mathbb{C}}$ de la siguiente manera: $\theta(N) = \infty$ y dado $P \in S \setminus \{N\}$, $\theta(P) = a + ib$ si y solo si $(a, b, 0)$ es el punto de intersección de la recta $\overline{NP} \subset \mathbb{R}^3$ con el plano $x_3 = 0$.

    a) Probar que $\theta(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$ si $(x_1, x_2, x_3) \neq N$.

    b) Probar que θ es una biyección y su inversa φ está dada por

    $$\varphi(z) = \frac{1}{1+|z|^2}\left(2\operatorname{Re}(z), 2\operatorname{Im}(z), |z|^2 - 1\right).$$

    c) Calcular $\varphi\big(\operatorname{Re}(z) = 0\big)$ y $\varphi\big(\operatorname{Im}(z) = 0\big)$.

24. Sea $\overline{d}$ la distancia en $\widehat{\mathbb{C}}$ inducida por la distancia de $\mathbb{R}^3$ vía θ, es decir, si z, $z' \in \widehat{\mathbb{C}}$, definimos $\overline{d}(z, z') = \|\varphi(z) - \varphi(z')\|$ donde $\|a\|$ representa la norma usual del vector a en $\mathbb{R}^3$.

   a) Verificar que $\overline{d}$ es una métrica en $\widehat{\mathbb{C}}$. Probar que $\overline{d}$ restringida a $\mathbb{C}$ es equivalente a la métrica usual (probando, por ejemplo, que $(\mathbb{C}, \overline{d})$ y $(\mathbb{C}, d)$ tienen las mismas sucesiones convergentes).

   b) Para $z, w \in \mathbb{C}$, verificar que $\overline{d}(z, w) = \dfrac{2|w-z|}{(1+|z|^2)^{\frac{1}{2}}(1+|w|^2)^{\frac{1}{2}}}$ y $\overline{d}(z, \infty) = \dfrac{2}{(1+|z|^2)^{\frac{1}{2}}}$.

   c) Probar que $(\widehat{\mathbb{C}}, \overline{d})$ es un espacio métrico compacto (y por lo tanto completo).

25. Sea C una circunferencia contenida en S y sea π el único plano en $\mathbb{R}^3$ tal que $\pi \cap S = C$. Mostrar que si C pasa por N entonces su proyección en $\mathbb{C}$ es una recta y, en caso contrario, una circunferencia.

Homografías

Una *homografía* es una función $T : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ del tipo $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ donde $ad - bc \neq 0$.

26. Probar que el conjunto $\mathcal{H}$ de las homografías es un grupo bajo la composición.

27. Sean z_2, z_3, z_4 puntos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$. Probar que existe una única homografía T tal que $T(z_2) = 0$, $T(z_3) = 1$ y $T(z_4) = \infty$. Deducir que dados puntos distintos w_2, w_3, w_4 de $\widehat{\mathbb{C}}$ hay una única homografía que aplica z_2 en w_2, z_3 en w_3 y z_4 en w_4.

28. *a*) Hallar homografías que transformen

   (i) los puntos $0, i, -i$ en $0, 1, \infty$;

   (ii) los puntos $0, i, -i$ en $1, -1, 0$.

   b) Probar que la imagen de la circunferencia de centro 0 y radio 1 por la primera homografía del ítem anterior es la recta $\{z : \mathrm{Re}(z) = 1\}$.

29. Para $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| \neq 1$, demostrar que la homografía

$$T(z) = \frac{z - \alpha}{-\overline{\alpha}z + 1}$$

transforma a la circunferencia $\{z : |z| = 1\}$ en si misma y a α en 0 ($|\alpha| \neq 1$).

30. Dada una matriz no singular

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}, \text{con } \det(A) = ab - cd \neq 0$$

le asignamos la homografía

$$T_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

Diremos que la matriz A representa a la homografía T_A.

Sean $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ no singulares que respresentan las homografías T_A y T_B respectivamente.

a) ¿Qué homografía representa la matriz AB?

b) ¿Qué homografía representa la matriz A^{-1}?

c) ¿Qué homografías representan las matrices diagonales?

d) ¿Cuando dos matrices distintas representan la misma homografía?

31. Demostrar que una homografía $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ aplica $\widehat{\mathbb{R}}$ en $\widehat{\mathbb{R}}$ si y solo si a, b, c y d son números reales.

32. *a*) Describir geométricamente las siguientes funciones:
    - $T(z) = z + c$, $c \in \mathbb{C}$ fijo (traslación),
    - $H(z) = a(z - z_0) + z_0$, $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $z_o \in \mathbb{C}$ (homotecia de centro z_0 y razón a),
    - $I(z) = z^{-1}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ (inversión).

    Caracterizar la imagen de una circunferencia y de una recta, por cada una de ellas.

    b) Probar que toda homografía se escribe como composición de funciones del inciso anterior.

    c) Describir la imagen por una homografía arbitraria de una circunferencia o recta.

33. Determinar la imagen de las siguientes regiones bajo la homografía indicada:

    a) El disco $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ por $f(z) = \dfrac{2z - i}{2 + iz}$.

    b) El medio-disco $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0 \text{ y } |z| < 1\}$ por $f(z) = \dfrac{2z - i}{2 + iz}$.

    c) El cuadrante $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0 \text{ y } \mathrm{Re}(z) > 0\}$ por $f(z) = \dfrac{z - i}{z + i}$.

34. Hallar homografías que transformen

    a) la circunferencia $|z| = 2$ en $|z + 1| = 1$ y además -2 en 0 y 0 en i;

    b) el semiplano superior $\mathrm{Im}(z) > 0$ en $|z| < 1$ y α en 0 (donde $\mathrm{Im}(\alpha) > 0$).