

Análisis 1 - Alimentos - 1º cuatrimestre 2019

PRÁCTICA 7

EXTREMOS

1. Calcular los extremos de $f(x, y) = x^2 + y^4$ y de $g(x, y) = x^4 + y^4$ y sus hessianos en dichos puntos.
2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que tiene un extremo estricto en $a \in \mathbb{R}$. ¿Es necesariamente $f''(a)$ positiva o negativa?
3. Encontrar los puntos críticos de las siguientes funciones y analizar cuáles son puntos de ensilladura:

a) $f(x, y) = x^2 - y^2$

b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x$

c) $f(x, y) = xy$

d) $f(x, y) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2 y}} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$

4. Sea $f(x, y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$. Probar que:

a) $(0, 0)$ es un punto de ensilladura.

b) El determinante de la matriz $Hf(0, 0)$ es cero.

c) f tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$ sobre cada recta que pase por $(0, 0)$, es decir, si $g(t) = (at, bt)$ entonces $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un mínimo relativo en 0 para cada elección de a, b .

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$

a) Probar que $(0, 0)$ es un punto crítico pero no extremo.

b) Probar que $\pm \sqrt{2}(1, -1)$ son mínimos absolutos. ¿Hay máximos relativos?

6. Para las siguientes funciones, encontrar los puntos críticos y analizar cuáles son máximos locales, mínimos locales o puntos de ensilladura.

a) $f(x, y) = (2x + 1 - y)^2$

b) $f(x, y) = x^2 - y^2 - xy + 3x + 3y + 1$

c) $f(x, y) = 10x^2 + 10y^2 + 12xy + 2x + 6y + 1$

d) $f(x, y) = e^{1+x^2+y^2}$

e) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + xy$

f) $f(x, y) = (x - y)^2 + 1 + 2(x - y)$

g) $f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$

h) $f(x, y, z) = xy + z^2$

i) $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2xz + z$

j) $f(x, y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$

k) $f(x) = \frac{1}{1 + \|x\|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n$

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que:

$$f(0,1) = 0, \quad \nabla f(0,1) = (0,2) \quad \text{y} \quad Hf(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por $g(x,y) = 3x^2y + e^{f(x,y)} - 2y$

a) Calcular $Hg(0,1)$

b) ¿Tiene g un extremo relativo en $(0,1)$?

8. Decidir si existen o no, números reales a y b tales que la función

$$f(x,y) = e^{y^4-x^2} + a(x-y) + b(x-2)(y-1)$$

tenga un mínimo relativo en el punto $(2,1)$.

9. La empresa Pejsi quiere fabricar "Narajsi", un nuevo producto sabor naranja que saldrá al mercado envasado en latitas. ¿Cuál debe ser la relación entre el radio de la base y la altura de la lata para que Pejsi minimice el costo de aluminio?

10. Determinar los extremos absolutos de $f|_A$ en los siguientes casos:

a) $f(x,y) = xy(x-y)^2 \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0\};$

b) $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq 3, |y| \leq 3\};$

c) $f(x,y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3 \quad A = \mathbb{R}^2;$

d) $f(x,y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3 \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq 1, |y| \leq 1\}.$

11. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función

$$f(x,y) = (y-1)^2 - x^3 + 3x^2 + 5.$$

Encontrar, justificando su existencia, el máximo y el mínimo valor que alcanza f en la región

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 4\}.$$

12. Encontrar el punto de la parábola $y^2 = 4x$ cuya distancia al $(1,0)$ es mínima.

13. Encontrar los máximos y mínimos de $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 1$ dentro del círculo unitario y en el borde.

14. Encontrar la distancia mínima entre la parábola $y = x^2$ y la recta $x - y - 2 = 0$.

15. Encontrar el punto de la superficie $z = xy - 1$ más cercano al origen.

16. La temperatura de una placa en un punto cualquiera (x,y) viene dada por la función $T(x,y) = 25 + 4x^2 - 4xy + y^2$. Una alarma térmica, situada sobre los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, se dispara a temperaturas superiores a 180 grados o inferiores a 20 grados. ¿Se disparará la alarma?

17. En una empresa se fabrican recipientes con forma de prisma rectangular con las siguientes características: la suma de todas sus aristas es de 30 metros y su superficie total es de 36 metros cuadrados. Determinar la capacidad máxima y mínima de estos recipientes.

Sugerencia: El prisma rectangular que fabrica la empresa no es otra cosa que una caja de zapatos gigante. Tener en cuenta la simetría de las variables en las formulas involucradas.