Análisis 1 - Alimentos - 1° cuatrimestre 2019

Práctica 4

Funciones: límite y continuidad

1. Calcular, si existen, los siguientes límites:

   a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x + \operatorname{sen} x}{e^x + \cos x}$ *b*) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{1/x}}{\ln(|x|)}$ *c*) $\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{sen} x$

   d) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ *e*) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$ *f*) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$

   g) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/\tan x}$ *h*) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ *i*) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x}$

2. Probar (acotando $|f(x,y) - L|$ adecuadamente) que:

   a) $\lim_{(x,y)\to(7,2)} x^2 + y^2 - xy = 39$;   *b*) $\lim_{(x,y)\to(0,3)} \operatorname{sen}(x\cos y) = 0$;

   c) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} xe^{xy} = 0$;   *d*) $\lim_{(x,y)\to(c,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 y)}{x^2 - y^2} = 0$ si $c \neq 0$.

3. *a*) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que f no se anula sobre $B_r(a,b)\backslash\{(a,b)\}$ y $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0$. Probar que:

   $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\operatorname{sen}(f(x,y))}{f(x,y)} = 1.$$

   b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = +\infty$. Probar que:

   $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\ln(f(x,y))}{f(x,y)} = 0.$$

4. Calcular los siguientes límites:

   a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ *b*) $\lim_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{x}$

   c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$ *d*) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2y^2)$.

5. Probar que la siguiente función no tiene límite cuando $(x,y) \to (0,0)$.

   $$f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(xy)}{|x-y|}$$

   Sugerencia: considerar la sucesión de puntos $p_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1})$, probar que esta sucesión tiende a cero y calcular el $\lim_{n\to\infty} f(p_n)$.

6. Demostrar que las siguientes funciones tienden a cero si (x,y) se aproxima al origen a lo largo de cualquier recta, pero que para ninguna de ellas existe el límite cuando $(x,y) \to (0,0)$

   a) $f(x,y) = \dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$;   *b*) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2-x}$;

   c) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$;   *d*) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-y)y}{x^4} & \text{si } 0 < y < x^2; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

7. Analizar la existencia de los límites de las siguientes funciones en el origen:

   a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$; *b*) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$;

   c) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{y}$; *d*) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{xy+y-x}$

   e) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$; *f*) $f(x,y) = (x^2+y^2)\ \ln(x^2+y^2)$.

8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la siguiente función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4(x+1)}{|x+1|^3 + 2\,|y|^3} & (x,y) \neq (-1,0) \\ 1 & (x,y) = (-1,0) \end{cases}$$

   a) Probar que f no es continua en $(-1,0)$.

   b) Redefinirla en $(x,y) = (-1,0)$, si es posible, de manera tal que resulte continua en $\mathbb{R}^2$.

9. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados

   a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0); \end{cases}$ en $(1,0)$ y $(0,0)$;

   b) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x\cos y)$ en $(1,1)$ y $(0,2)$;

10. Probar que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   es continua respecto de cada una de las variables por separado pero no lo es como función de ambas.

11. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones

   (a) $f(x,y) = \left(x^2,\ e^x\right)$ (b) $f(x,y) = \left(\dfrac{\operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}\ ,\ \dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}\right)$

12. *a*) Hallar todas las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x)^2 - e^x = 0$.

   b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{Im}(f) = [a,b] \cup [c,d]$ con $a < b < c < d$. ¿Es f continua?

   c) Demostrar que la ecuación $x2^x = 1$ tiene al menos una raíz positiva y menor o igual que 1.

   d) Probar que todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz real.

13. a) Sea $f : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{1-\|x\|}$. Probar que f es continua y no es acotada.

    b) Sea $g : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \|x\|$. Probar que g es continua y acotada pero no alcanza su máximo en $B_1(0)$.

14. Sea $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 y)}{\ln(1 - x^2)}$

    a) Encontrar el dominio D de f y graficarlo.

    b) Dado $q = (q_1, q_2) \in \partial D$, ¿existe $\lim_{(x,y)\to(q_1,q_2)} f(x, y)$?