

Análisis 1 - Alimentos - 1º cuatrimestre 2019

PRÁCTICA 2

SUBESPACIOS, AUTOVALORES, DIAGONALIZACIÓN

Subespacios, generadores y bases

1. a) Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos del plano son puntos, rectas o todo $\mathbb{R}^2$.

$$\mathbb{S}_1 = \langle (0, 0) \rangle \quad \mathbb{S}_2 = \langle (1, 1) \rangle \quad \mathbb{S}_3 = \langle (1, 1); (2, 2) \rangle$$

$$\mathbb{S}_4 = \langle (1, 0); (0, 2) \rangle \quad \mathbb{S}_5 = \langle (1, 1); (-1, -1) \rangle$$

- b) Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos del espacio son puntos, rectas, planos o todo $\mathbb{R}^3$.

$$\mathbb{S}_1 = \langle (0, 0, 0) \rangle \quad \mathbb{S}_2 = \langle (1, 1, 1) \rangle \quad \mathbb{S}_3 = \langle (1, 1, 1); (2, 2, 2) \rangle \quad \mathbb{S}_4 = \langle (1, 0, 1); (0, 2, 0) \rangle$$

$$\mathbb{S}_5 = \langle (1, 0, 1); (0, 2, 0); (3, 5, 3) \rangle \quad \mathbb{S}_6 = \langle (1, 0, 1); (0, 2, 0); (a, b, a) \rangle$$

$$\mathbb{S}_7 = \langle (1, 0, 1); (0, 2, 0); (3, 0, 1) \rangle$$

2. En cada caso, determinar si el vector $\mathbf{v}$ pertenece al subespacio $\mathbb{S}$ y, en caso afirmativo, escribir a $\mathbf{v}$ como combinación lineal de los generadores dados.

a) $\mathbf{v} = (1, 2) \quad \mathbb{S} = \langle (2, 3); (3, 4) \rangle$

b) $\mathbf{v} = (-1, 1/2, 2) \quad \mathbb{S} = \langle (2, -1, -4) \rangle$

c) $\mathbf{v} = (1, 2, 3) \quad \mathbb{S} = \langle (-1, 1, 3); (2, 1, 0) \rangle$

d) $\mathbf{v} = (1, 2, 3) \quad \mathbb{S} = \langle (1, 1, 1); (2, 1, 1); (1, -1, -1) \rangle$

e) $\mathbf{v} = (-1, 2, 2) \quad \mathbb{S} = \langle (1, 2, 3); (-3, -2, -4); (0, 4, 5) \rangle$

f) $\mathbf{v} = (x, y, z) \quad \mathbb{S} = \langle (1, 1, 1); (1, 1, 0); (1, 0, 0) \rangle$

3. Decidir si el conjunto de vectores es linealmente dependiente o independiente. En caso de que sea linealmente dependiente, escribir alguno de los vectores como combinación lineal de los otros.

a) $\{(1, -1); (-1, 2)\}$

b) $\{(1, -1); (-1, 2); (3, 4)\}$

c) $\{(1, -1); (0, 0); (-1, 2)\}$

d) $\{(1, -1); (-2, 2)\}$

e) $\{(3, 2, -1)\}$

f) $\{(1, -2, -1); (-2, 1, 0); (-2, 4, 2)\}$

g) $\{(1, -2, -1); (-2, 4, 2)\}$

h) $\{(1, -2, -1); (-2, 1, 0); (0, 3, 1)\}$

i) $\{(1, 1, -2); (4, 0, -7); (-1, 3, 1)\}$

j) $\{(1, 1, 1); (0, 1, 1); (0, 0, 1)\}$

4. Dar una base y la dimensión del subespacio $\mathbb{S}$.

a) $\mathbb{S} = \langle (1, -1); (-1, 2) \rangle$

b) $\mathbb{S} = \langle (1, -1, 2); (0, 0, 1); (-2, 2, 0) \rangle$

c) $\mathbb{S} = \langle (1, -2, -1); (-2, 1, 0); (0, 3, 1) \rangle$

d) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 - 2x_2 = 0\}$

e) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3 = 0; x_2 - x_3 = 0; 2x_1 + 2x_2 = 0\}$

f) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 - 3x_3 = 0; x_2 + x_3 - 2x_4 = 0\}$

- a) $\{(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5)\}$ en $\mathbb{R}^3$.
- b) $\{(1, 0, -1), (1, 1, 2), (0, 1, 1)\}$ en $\mathbb{R}^3$.
- c) $\{(1, 1, 2), (1, 4, 3), (3, 3, 3), (e, \pi, \sqrt{2})\}$ en $\mathbb{R}^3$.
- d) $\{(1, 1, 1), (1, \alpha, \alpha^2), (1, \beta, \beta^2)\}$ en $\mathbb{R}^3$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- e) $\{(1, 1, 1, 1), (1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3), (1, \beta, \beta^2, \beta^3)\}$ en $\mathbb{R}^4$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
14. Determinar todos los $\lambda \in \mathbb{R}$ de manera que los siguientes conjuntos resulten linealmente independientes:
- a) $\{(1, 2, \lambda), (1, 1, 1), (0, 1, 1 - \lambda)\}$ en $\mathbb{R}^3$.
- b) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ en $M_2(\mathbb{R})$.
15. Encuentre bases para los siguientes espacios vectoriales
- a) $V = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A = A^t\}$ sobre $\mathbb{R}$.
- b) $V = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \text{Tr } A = 0\}$ sobre $\mathbb{R}$.

Operaciones con matrices y vectores

16. a) Probar que el producto de matrices en $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ no es conmutativo.
 b) Caracterizar el conjunto $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / A.B = B.A \ \forall B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}\}$.
17. a) Exhibir una matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que $A^2 = -I$.
 b) Sean A, B y $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Mostrar la falsedad de las siguientes afirmaciones:
- 1) $(A.B)^2 = A^2 B^2$
 - 2) $A.B = 0 \Rightarrow A = 0$ ó $B = 0$
 - 3) $A.B = A.C$ y $A \neq 0 \Rightarrow B = C$
 - 4) $A.B = 0 \Rightarrow B.A = 0$
 - 5) $A^j = 0 \Rightarrow A = 0$
 - 6) $A^2 = A \Rightarrow A = 0$ ó $A = I_n$
- c) Dar condiciones necesarias y suficientes sobre A y $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ para que:
- 1) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
 - 2) $A^2 - B^2 = (A - B).(A + B)$
18. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno usual de $\mathbb{R}^n$. Verificar que si pensamos $v, w \in \mathbb{R}^n$ como matrices de $n \times 1$, entonces

$$\langle v, w \rangle = w^t \cdot v = v^t \cdot w = \langle w, v \rangle$$

donde pensamos a sus traspuestos v^t, w^t como matrices de $1 \times n$.

19. Sean T_1, T_2 matrices de $n \times n$. Probar que si para todo par de vectores v, w de $\mathbb{R}^n$ se tiene $\langle T_1 v, w \rangle = \langle T_2 v, w \rangle$, entonces $T_1 = T_2$.
20. Se $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, sea A^t la matriz traspuesta de A . Probar que
- a) $(Av)^t = v^t \cdot A^t$ para todo vector $v \in \mathbb{R}^n$.

- b) $\langle Av, w \rangle = w^t \cdot A \cdot v = (A^t w)^t \cdot v = \langle v, A^t w \rangle$ para todo par de vectores $v \in \mathbb{R}^n, w \in \mathbb{R}^m$.
21. Una matriz $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es **ortogonal** si $\langle Uv, Uw \rangle = \langle v, w \rangle$ para todo $v, w \in \mathbb{R}^n$. Probar que son equivalentes:
- U es ortogonal.
 - U es una isometría, o sea $\|Uv\| = \|v\|$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$.
 - U es inversible y su inversa se calcula como su traspuesta, es decir $U^{-1} = U^t$.
22. Probar que toda matriz ortogonal verifica $\det(U) = \pm 1$. ¿Es cierta la recíproca? (dar una prueba o un contraejemplo).
23. Probar que $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal de $\mathbb{R}^2$. Mostrar que U es una simetría con respecto a la recta $y = x$. ¿Qué determinante tiene U ? ¿Preserva la orientación de $\mathbb{R}^2$?
24. Si $\theta \in [0, 2\pi]$, y $U_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, probar que U_θ es ortogonal y preserva la orientación. Mostrar que U es una rotación de ángulo θ alrededor del origen, en sentido positivo.

Autovalores y autovectores, diagonalización

25. Calcular el polinomio característico, los autovalores y autovectores de cada matriz:
- $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
 - $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;
 - $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$;
 - $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;
 - $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$;
 - $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.
26. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. Mostrar que A y A^t tienen los mismos autovalores. Mostrar con un ejemplo que no sucede lo mismo con los autovectores.
27. Sea $A \in M_2(\mathbb{R})$ tal que $\det(A) = 3$ y $\text{Tr}(A) = -4$, hallar los autovalores de A .
28. Calcular el polinomio característico, los autovalores y autovectores de la matriz A de cada ítem (en todos los casos, $a \in \mathbb{R}$):
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;
 - $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;
 - $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$;
 - $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;
 - $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;
 - $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$;
 - $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$.
29. a) Sean $A, C, D \in M_n(\mathbb{R})$ con C inversible tales que $A = C^{-1}DC$. Mostrar que $A^k = C^{-1}D^kC$ cualquiera sea $k \in \mathbb{N}$.

b) Calcular

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}^n$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

30. a) Hallar C, D como en el ejercicio anterior para cada una de las matrices A del Ejercicio 28.
- b) Mostrar que en cada caso, puede cambiarse C por una matriz ortogonal U de manera tal que $A = U^T D U$.
- c) Decidir en cada caso si A es (semi)-definida positiva, negativa o indefinida.