Análisis 1 - Alimentos - 1° cuatrimestre 2019

Práctica 1

Vectores, rectas, planos y sistemas lineales

Geometría en el plano y el espacio

1. Graficar los puntos $P = (3,1)$ y $Q = (1,-5) \in \mathbb{R}^2$ en el plano.

   a) Calcular y representar gráficamente los puntos $P+Q$, $P-Q$, $3.P$, $-2.Q$ y $P+\frac{1}{2}Q$.

   b) Representar en un mismo gráfico $3.P$, $-2.Q$ y $3.P-2.Q$.

   c) Graficar los conjuntos $A = \{a.P \in \mathbb{R}^2 \ / \ a \in \mathbb{R}\}$ y $B = \{b.Q \in \mathbb{R}^2 \ / \ b \in \mathbb{R}\}$

   d) Determinar geométricamente para qué valores de (x,y) existen a y $b \in \mathbb{R}$ tales que $a.P + b.Q = (x,y)$.

2. *a*) Representar gráficamente en $\mathbb{R}^3$ los puntos $P = (1,0,0)$, $Q = (1,1,0)$, $R = (1,1,1)$ y calcular y representar gráficamente los puntos $S = P+Q$, $T = Q-R$ y $V = \frac{1}{2}.R - P$.

   b) Un cubo tiene vértices en $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$. Escribir las coordenadas de los otros 4 vértices.

   c) Hallar, si es posible, a, b y $c \in \mathbb{R}$ tales que $(1,2,3) = a.(1,0,0) + b.(1,1,0) + c.(1,1,1)$.

3. Efectuar las operaciones indicadas en cada caso.

   a) Si $P = (2,3,0,-2)$ y $Q = (1,4,-2,-1) \in \mathbb{R}^4$, calcular $R = P+3.Q$ y $S = 2.P - \frac{1}{3}.Q$.

   b) Si $P = (1,0,-3,0,2)$ y $Q = (0,-1,-2,0,4) \in \mathbb{R}^5$, calcular $R = -P + 2.Q$ y $S = -2.P - \frac{2}{3}.Q$.

4. Dado un vector se le realizan dos operaciones consecutivas: primero se lo multiplica por un escalar fijo (dilatación) y luego se le suma otro vector fijo (traslación).

   a) Si se le aplican estas dos operaciones al vector $\mathbf{v} = (1,2)$ en $\mathbb{R}^2$ se llega al vector $\mathbf{w} = (-6,12)$. ¿Se puede decidir cuál fue la dilatación y cuál la traslación? (Sugerencia: buscar si es posible llegar de $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ de dos formas distintas).

   b) Si se le aplican las dos operaciones a $\mathbf{v}_1 = (1,2)$ y a $\mathbf{v}_2 = (3,4)$ en $\mathbb{R}^2$ se llega a $\mathbf{w}_1 = (-6,12)$ y a $\mathbf{w}_2 = (-5,13)$ respectivamente. Hallar el escalar que da la dilatación y el vector que da la traslación.

   c) ¿Puede ser que luego de aplicar la misma dilatación y la misma traslación a los vectores $\mathbf{v}_1 = (1,1)$ y $\mathbf{v}_2 = (2,-4)$ se llegue a los vectores $\mathbf{w}_1 = (2,4)$ y $\mathbf{w}_2 = (-2,3)$ respectivamente?

Producto interno (o escalar)

5. *a*) En cada caso, graficar los vectores de $\mathbb{R}^2$ involucrados, calcular el producto escalar $\cdot$ indicado y determinar si son ortogonales:

$$(1,-1)\cdot(2,4); \quad (1,3)\cdot(-6,2); \quad (1,2)\cdot(1,2); \quad (-1,0)\cdot(0,1)$$

b) En cada caso, calcular el producto escalar indicado de vectores de $\mathbb{R}^3$ y decidir si son ortogonales:

$$(1,3,5)\cdot(3,0,-2); \quad (-1,2,1)\cdot(6,1,4); \quad (2,4,-2)\cdot(-3,-6,3); \quad (1,0,0)\cdot(0,1,1)$$

c) Hallar tres vectores distintos de $\mathbb{R}^2$ que sean ortogonales a $(5,-3)$. ¿Qué relación cumplen entre sí?

d) Encontrar dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$ ortogonales a $(1,1,2)$ que no sean paralelos entre sí.

e) Hallar tres vectores distintos de $\mathbb{R}^3$ que sean ortogonales a $(1,2,1)$ y a $(1,-3,0)$ simultáneamente. ¿Qué relación cumplen entre sí?

6. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas para vectores $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ y $\mathbf{z}$:

   a) Si $\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{w}$, entonces $\mathbf{v}$ es ortogonal a $-\mathbf{w}$ y a $5.\mathbf{w}$.

   b) Si $\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{w}$ y a $\mathbf{z}$, entonces $\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{w}+\mathbf{z}$ y a $3.\mathbf{w}-2.\mathbf{z}$.

   c) Si $\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{w}$, entonces $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ es ortogonal a $\mathbf{w}$.

   d) Si $\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{w}$ y a $\mathbf{w}-3.\mathbf{z}$, entonces $\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{z}$.

Rectas en $\mathbb{R}^2$

7. Graficar $\mathbb{L}\subset\mathbb{R}^2$ la recta que pasa por los puntos $(1,1)$ y $(-2,2)$.

   a) Encontrar dos vectores dirección distintos para $\mathbb{L}$. Graficarlos.

   b) Dar dos ecuaciones paramétricas para $\mathbb{L}$.

   c) Decidir cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta $\mathbb{L}$: $(-3,1)$, $(4,0)$, $(0,0)$, $(-3x+1,x+1)$.

   d) ¿Es $\mathbb{L}$ igual a la recta $\mathbb{L}' : X = \lambda.(-27,9)+(-14,6)$? ¿Y a la recta $\mathbb{L}'' : X = \lambda.(27,-9)+(-27,9)$?

8. Un móvil se desplaza por el plano $\mathbb{R}^2$ de forma tal que, en tiempo t, se encuentra en el punto $t.(3,-2)+(1,1)$.

   a) Graficar la trayectoria del móvil si parte en tiempo $t=0$.

   b) Graficar los puntos donde se encuentra en tiempo $t=1$, $t=2$, $t=3$ y $t=4$.

   c) Si $P(t)$ es el punto en el que se encuentra en tiempo t, calcular $P(0)$ y $P(t+1)-P(t)$ para un valor genérico de t. ¿Qué relación tienen con los datos dados?

   d) Si hay una pared ubicada en la recta vertical de ecuación $x=16$, ¿en qué momento choca el móvil contra la pared?

9. Dada la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.(1,2)+(3,2)$:

   a) Dar una ecuación paramétrica para la recta $\mathbb{L}_1$ paralela a $\mathbb{L}$ que pasa por $(0,0)$.

   b) Dar una ecuación paramétrica para la recta $\mathbb{L}_2$ paralela a $\mathbb{L}$ que pasa por $(-1,-6)$.

c) Graficar $\mathbb{L}$, $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ en un mismo sistema de coordenadas. ¿Qué relación cumplen $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$? Justificar.

10. Sea $\mathbb{L}$ la recta que pasa por $(-1, 2)$ y $(0, 3)$.

    a) Hallar una ecuación paramétrica de la recta $\mathbb{L}_1$ perpendicular a $\mathbb{L}$ que pasa por $(0, 0)$.

    b) Hallar una ecuación paramétrica de la recta $\mathbb{L}_2$ perpendicular a $\mathbb{L}$ que pasa por $(1, 2)$.

    c) Graficar las tres rectas en un mismo sistema de coordenadas. ¿En qué posición relativa están $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$?

11. Sean $P = (4, 9)$, $Q = (-6, 5)$ y $\mathbb{L} : X = \lambda.(1, 2)$. Hallar todos los puntos $R \in \mathbb{L}$ tales que:

    a) el triángulo PQR sea rectángulo en P.

    b) el triángulo PQR sea rectángulo en R.

12. a) Dar una ecuación paramétrica de la recta paralela a $\mathbb{L} : x = 2$ que pasa por $(3, 8)$.

    b) Dar una ecuación implícita de la recta perpendicular a $\mathbb{L} : X = \lambda.(2, 3) + (1, 2)$ que pasa por $(5, -2)$.

13. Hallar, en cada caso, la intersección de las rectas $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ y decidir sus posiciones relativas:

    a) $\mathbb{L}_1 : 3x + y = -3$ y $\mathbb{L}_2 : X = \alpha(1, 3) + (2, 0)$.

    b) $\mathbb{L}_1 : -2x + 3y = -13$ y $\mathbb{L}_2 : y = 7x + 2$.

    c) $\mathbb{L}_1 : X = \alpha.(-4, 1) + (2, 1)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \beta.(-2, 1) + (0, -1)$.

    d) $\mathbb{L}_1 : X = \alpha.(-3, 2) + (5, 1)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \beta.(6, -4) + (0, 1)$.

    e) $\mathbb{L}_1 : x - 2y = -1$ y $\mathbb{L}_2 : X = \alpha.(2, 1) + (1, 1)$

14. Sean $\mathbb{L}_1 : x - 2y = 3$, $\mathbb{L}_2 : -2x + y = -3$ y $\mathbb{L}_3 : X = \alpha.(1, -7)$.

    a) Dar una ecuación paramétrica de la recta $\mathbb{L}$ que pasa por el punto de intersección de $\mathbb{L}_2$ y $\mathbb{L}_3$ y es paralela a $\mathbb{L}_1$.

    b) Dar una ecuación implícita de la recta $\mathbb{L}'$ que pasa por el punto de intersección de $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ y es perpendicular a $\mathbb{L}_3$.

Producto vectorial, rectas y planos en $\mathbb{R}^3$

15. a) En cada caso, calcular el producto vectorial indicado de vectores de $\mathbb{R}^3$. ¿En qué casos da $(0, 0, 0)$?

$$(1, 3, 5) \times (3, 0, -2); \quad (-1, 2, 1) \times (6, 1, 4); \quad (2, 4, -2) \times (-3, -6, 3);$$

$$(0, 0, 0) \times (1, -1, 3); \quad (a, b, c) \times (ka, kb, kc)$$

    b) Dar un vector que sea ortogonal a $(1, 3, 5)$ y a $(3, 0, -2)$ simultáneamente.

16. En cada caso, dar una ecuación paramétrica de la recta en $\mathbb{R}^3$ que:

   a) tiene dirección $(1, -1, 2)$ y pasa por el origen de coordenadas.
   b) tiene dirección $(1, -1, 2)$ y pasa por el punto $(0, 2, -3)$.
   c) pasa por los puntos $(1, 5, 1)$ y $(-4, 3, 2)$.
   d) es paralela a $\mathbb{L} : X = \lambda.(2, 1, -1) + (-2, 4, 1)$ y pasa por el punto $(0, 3, 2)$.
   e) pasa por el origen y es paralela a la recta que contiene a $(2, -2, 1)$ y a $(-3, 2, 1)$.
   f) es perpendicular a $(2, 1, 0)$ y a $(0, -1, 2)$ simultáneamente y pasa por el origen.
   g) es perpendicular a las rectas $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(2, 1, -1) + (-2, 4, 1)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \lambda.(-1, 0, 2) + (2, 1, 0)$ simultáneamente y pasa por el punto $(0, 3, 2)$.

17. Sean $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(1, 2, -1) + (1, 3, 5)$ y $\mathbb{L}_2$ la recta paralela a $\mathbb{L}_1$ que pasa por el punto $(3, 2, 4)$.

   a) Hallar el punto de $\mathbb{L}_2$ que tiene coordenada $z = 0$.
   b) Decidir si los puntos $(-1, -1, 7)$ y $(1, -2, 6)$ están en $\mathbb{L}_2$.

18. a) Decidir si los puntos $(1, 2, -4)$, $(3, -2, 0)$ y $(2, 0, -2)$ están alineados.
   b) Decidir si los puntos $(1, 1, 3)$, $(2, 1, 4)$ y $(2, 1, 5)$ están alineados.
   c) Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que los puntos $(2+a, 3, -1)$, $(5, a+3, -2)$ y $(a, -1, 1)$ están alineados.

19. Sean $\mathbb{L} : X = \beta.(1, 1, -2) + (0, 0, 4)$ y $P = (3, 1, 0)$. En cada caso, determinar un punto $Q \in \mathbb{R}^3$ tal que:

   a) la recta que pasa por P y Q sea paralela a $\mathbb{L}$.
   b) $Q \in \mathbb{L}$ y la recta que pasa por P y Q sea perpendicular a $\mathbb{L}$.

20. Dadas las rectas

$$\mathbb{L}_1 : X = \alpha.(1, 2, 1) + (2, 3, 2) \qquad \mathbb{L}_2 : X = \beta.(0, 1, -1) + (1, 3, -1)$$
$$\mathbb{L}_3 : X = \gamma.(2, 4, 2) + (1, 5, 0) \qquad \mathbb{L}_4 : X = \delta.(2, 4, 2) + (3, 5, 3)$$

calcular las siguientes intersecciones y, en cada caso, dar la posición relativa de las rectas en el espacio:

$$a)\ \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \quad b)\ \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_3 \quad c)\ \mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L}_3 \quad d)\ \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_4$$

21. a) Dos móviles se desplazan por el espacio de forma tal que las ecuaciones de sus movimientos están dadas por $t.(1, 2, -4) + (-1, 3, 0)$ y $t.(1, 6, -10) + (2, 1, 0)$ para $t \geq 0$. Decidir si las trayectorias de los móviles se cruzan y, en caso afirmativo, decir en qué punto. ¿Se encuentran los dos móviles?
   b) Mismo problema para las ecuaciones de movimiento

$$t.(1, 2, 0) + (0, 3, 2) \qquad \text{y } t.(3, -4, 0) + (1, 5, 7).$$

   ¿Son paralelas estas trayectorias?

22. En cada caso, dar una ecuación implícita de:

a) los planos coordenados xy, xz y yz.

b) el plano Π perpendicular al vector $(1, -1, 2)$ que pasa por el origen de coordenadas.

c) el plano Π perpendicular a la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.(2, 1, -1) + (-2, 4, 1)$ que pasa por el punto $(-4, 3, 2)$.

d) el plano Π paralelo al plano $\Pi_1 : 2x - 3y + z = 3$ que pasa por el punto $(0, 1, 2)$.

e) el plano Π que contiene a los puntos $(1, 0, 0)$, $(2, 1, 0)$ y $(1, 1, -1)$.

23. *a*) Decidir si el punto $(1, 2, -3)$ está en el plano que pasa por los puntos $(1, 1, 0)$, $(2, 3, -1)$ y $(5, 0, 2)$.

b) Decidir si los puntos $(1, 1, 0)$, $(2, 3, -1)$, $(5, 0, 2)$ y $(0, -1, 1)$ son coplanares (es decir, están en un mismo plano).

24. Dados el plano $\Pi : 2x - 3y + 7z = 3$ y las rectas $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(2, 1, -1) + (-2, 4, 1)$, $\mathbb{L}_2 : X = \lambda.(2, -1, -1) + (-7, -1, 2)$ y $\mathbb{L}_3 : X = \lambda.(-1, 4, 2) + (1, 0, 1)$:

a) Calcular las intersecciones $\Pi \cap \mathbb{L}_1$, $\Pi \cap \mathbb{L}_2$ y $\Pi \cap \mathbb{L}_3$.

b) Un móvil se dirige hacia el plano Π según la ecuación de movimiento $t.(1, 1, 1) + (-7, 0, -1)$ para $t \geq 0$. Calcular en qué tiempo llega al plano y en qué punto lo impacta.

25. En cada caso, dar una ecuación paramétrica de una recta en $\mathbb{R}^3$ que:

a) es perpendicular al plano $\Pi : 4x - 2y + z = 3$ y pasa por el punto $(0, 1, -2)$.

b) es paralela a los planos $\Pi_1 : 3x - y + 2z = 4$ y $\Pi_2 : y + z = 3$ simultáneamente y pasa por el punto $(1, 3, 1)$.

c) es perpendicular a la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.(0, 0, 1) + (1, 3, -2)$ y está incluida en el plano $\Pi : x + y + z = 2$.

26. *a*) Dar una ecuación implícita del plano Π que contiene a las rectas transversales $\mathbb{L} : X = \lambda.(1, 2, -1) + (3, 0, 0)$ y $\mathbb{L}' : X = \lambda.(-2, -4, 1) + (5, 4, -3)$.

b) Dar una ecuación implícita del plano Π que contiene a las rectas paralelas $\mathbb{L} : X = \lambda.(1, 2, -1) + (3, 0, 0)$ y $\mathbb{L}' : X = \lambda.(-2, -4, 2) + (0, 1, 1)$.

c) ¿Existe algún plano que contenga simultáneamente a las rectas $\mathbb{L} : X = \lambda.(1, 2, 0) + (3, 0, -3)$ y $\mathbb{L}' : X = \lambda.(-2, 0, 0) + (0, 2, 3)$?

27. *a*) Hallar una ecuación paramétrica del plano Π_1 que pasa por $P = (2, -1, 7)$, $Q = (0, 2, 3)$ y $R = (1, -1, 2)$.

b) Verificar que P, Q y R pertenecen al plano $\Pi_2 : X = \alpha.(1, 0, 5) + \beta.(-1, 3, 1) + (1, -1, 2)$. Deducir que, como P, Q y R no están alineados, Π_1 y Π_2 son el mismo plano.

c) Hallar una ecuación paramétrica del plano Π_3 paralelo a Π_1 que pasa por el punto $(1, 0, 2)$.

28. Dar en $\mathbb{R}^3$ ecuaciones implícitas de:

a) el plano $\Pi_1 : X = \alpha.(1, 0, 5) + \beta.(-1, 3, 1) + (1, -1, 2)$.

b) el plano paralelo al plano $\Pi_2 : X = \alpha.(1,3,2) + \beta.(2,5,3) + (3,2,1)$ que pasa por el punto $(2,3,1)$.

29. Decidir en cada caso si los planos Π_1 y Π_2 se intersecan. En caso afirmativo, dar una ecuación paramétrica de la intersección.

$$a)\ \Pi_1 : y = 0, \Pi_2 : z = 2 \quad b)\ \Pi_1 : x + z = 0, \Pi_2 : y - z = 0$$

$$c)\ \Pi_1 : x + y - z = 0, \Pi_2 : x + z = 2 \quad d)\ \Pi_1 : x - z = 0, \Pi_2 : 2x - 2z = 3$$

30. En cada caso, dar ecuaciones implícitas que definan la recta pedida.

a) $\mathbb{L}_1 : X = \alpha.(1,3,1) + (2,0,0)$.

b) $\mathbb{L}_2 : X = \beta.(-3,0,1) + (1,1,1)$.

c) la recta $\mathbb{L}_3$ perpendicular al plano $\Pi_1 : X = \alpha.(1,0,5) + \beta.(-1,3,1) + (1,-1,2)$ que pasa por $(1,0,1)$.

d) la recta $\mathbb{L}_4$ que pasa por el punto $(2,0,-1)$, está incluida en el plano $\Pi_2 : 3x - z = 7$ y es paralela al plano $\Pi_3 : X = \alpha.(2,0,-2) + \beta.(3,1,1) + (1,0,2)$ simultáneamente.

31. Dadas las rectas

$$\mathbb{L}_1 : \begin{cases} x + y - z = 4 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \mathbb{L}_2 : \begin{cases} 2x - 3z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

a) Dar ecuaciones paramétricas para $\mathbb{L}_1$ y para $\mathbb{L}_2$.

b) Decidir si son paralelas, coincidentes, alabeadas o se cortan en un punto.

Normas, distancias y ángulos

32. Dados $\mathbf{v} = (3,-4)$ y $\mathbf{w} = (1,2)$ en $\mathbb{R}^2$, calcular

$$\|\mathbf{v}\|, \quad \|\mathbf{w}\|, \quad \|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|, \quad \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|, \quad \|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|, \quad \|2\mathbf{v}\|, \quad \left\|\tfrac{1}{2}\mathbf{v}\right\|, \quad \left\|\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}\right\|.$$

33. Graficar en el plano el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\| = 2\}$.

34. Calcular la distancia entre los puntos dados y el ángulo entre los vectores determinados por ellos.

a) $(2,3)$ y $(5,1)(1,0)$ y $(-\sqrt{3},1)$

b) $(1,0,0)$ y $(-\sqrt{2},1,1)$ $(0,-1,1)$ y $(-\sqrt{2},1,1)$

35. Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ tales que

a) la norma del vector $(2,-2,k)$ es igual a 3.

b) el ángulo entre los vectores $(2,1,1)$ y $(1,-1,k)$ es $\dfrac{\pi}{3}$.

36. Hallar los ángulos que forman los vectores dados con los semiejes coordenados positivos.

a) $(1,-1)$, $(-1, \sqrt{3})$ y $(1,2)$ en $\mathbb{R}^2$.

b) $(1,0,-1)$, $(0,2,0)$ y $(1,-1,2)$ en $\mathbb{R}^3$.

37. Dados la norma ρ y el ángulo θ que forman los vectores con el semieje positivo de las x (medido en sentido antihorario), hallar sus coordenadas en $\mathbb{R}^2$.

    a) $\rho = 2,\ \theta = \frac{\pi}{6} \rho = \sqrt{2},\ \theta = \frac{3\pi}{4}\ \rho = 3,\ \theta = \frac{\pi}{2}$

38. Sabiendo que el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es $\frac{\pi}{3}$, $\|\mathbf{w}\| = 4$ y $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$, calcular $\|\mathbf{v}\|$.

39. Demostrar las siguientes propiedades e interpretarlas geométricamente.

    a) $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ si y solo si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.

    b) $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$ si y solo si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$. (Teorema de Pitágoras.)

Matrices y sistemas lineales

40. Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 7 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, hallar

    a) la segunda fila de AB;

    b) la tercera columna de BA;

    c) el elemento c_{23} de $C = ABA$.

41. Dado el sistema lineal

$$\mathcal{S} : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & & & - & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & & & + & 3x_3 & + & x_4 & = & -1 \end{array} \right.$$

¿Cuáles de las siguientes 4-uplas son soluciones de $\mathcal{S}$?¿Y del sistema homogéneo asociado?

   a) $\mathbf{x} = (2,2,1,0)$, $\mathbf{y} = (1,1,1,4)$, $\mathbf{z} = (0,0,0,0)$

   b) $\mathbf{u} = (-2, -\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, -7)$, $\mathbf{v} = (-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$, $\mathbf{w} = (-1,-2,3,-7)$.

42. Determinar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los que $(a, -a, a-1)$ es solución del sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & & & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \end{array} \right.$$

43. Resolver por el método de eliminación de Gauss el sistema cuya matriz ampliada es $(A|\mathbf{b})$.

    a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{array}{rcl} \mathbf{b} & = & (1,2) \\ \mathbf{b} & = & (0,0) \end{array}$

$b)$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\mathbf{b} = (3,1,-1)$, $\mathbf{b} = (0,0,0)$, $\mathbf{b} = (1,1,2)$

$c)$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\mathbf{b} = (5,3,2)$, $\mathbf{b} = (-1,1,2)$, $\mathbf{b} = (0,0,0)$

$d)$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\mathbf{b} = (0,0,0)$, $\mathbf{b} = (1,0,0)$, $\mathbf{b} = (0,1,0)$

$e)$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\mathbf{b} = (1,2,1,2)$, $\mathbf{b} = (2,0,-1,2)$, $\mathbf{b} = (0,0,0,0)$

44. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$. Si $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ son soluciones de $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$,

   a) hallar una solución de $A\mathbf{x} = 0$.

   b) hallar una recta de soluciones de $A\mathbf{x} = 0$.

   c) hallar cuatro soluciones de $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

45. Sean $(1,3,1)$, $(2,2,4)$ y $(2,0,4)$ soluciones de un sistema lineal no homogéneo.

   a) Hallar dos rectas distintas tales que todos sus puntos sean soluciones del sistema homogéneo asociado.

   b) Encontrar un plano tal que todos sus puntos sean soluciones del sistema no homogéneo.

46. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$. Si $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ son soluciones de $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ es solución de $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

   a) encontrar una solución del sistema $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   b) encontrar una recta de soluciones del sistema $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Determinante, inversa, rango

47. Calcular los siguientes determinantes, desarrollando por cofactores por la fila o columna más conveniente.

$$a)\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

48. Calcular los determinantes de las siguientes matrices usando propiedades.

$$a)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

49. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Calcular $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(A^t)$, $\det(AB)$, $\det(A+B)$, $\det(A^{10})$ y $\det(A^5B - A^5)$.

50. Si $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $\det(A) = 15$, calcular $\det(2A), \det((3A)^{-1}), \det(3A^{-1})$.

51. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\det(AB) = 2$. Calcular $\det(B^{-1})$.

52. *a*) Determinar todos valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales la matriz A no es inversible.

- $A = \begin{pmatrix} 2 & k+4 \\ k-2 & -4 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & 2k \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} k & 2 & 1 \\ 0 & k^2-1 & 2 \\ 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} k & 3 & 0 \\ k^2 & 9 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

b) Determinar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales la matriz A es inversible.

- $A = \begin{pmatrix} k+1 & 2 \\ 2 & k-2 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & k & k \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & k & k+1 \end{pmatrix}$

53. *a*) Encontrar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema $\mathcal{S}$ tiene solución única.

$$\mathcal{S}: \begin{cases} (k^2-1)x_1 + x_2 + kx_3 = 0 \\ (k-1)x_2 + x_3 = 0 \\ (k+2)x_3 = 0 \end{cases}$$

b) Determinar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema $\mathcal{S}$ admite solución no trivial.

$$\mathcal{S}: \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} (k+1)x_1 & + & kx_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & kx_2 & + & (k+2)x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & kx_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

54. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & a+1 & a \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix}$. Encontrar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema $A\mathbf{x} = 2\mathbf{x}$ admite solución no trivial.

55. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\det(B) = -3$.

    Hallar todas las soluciones del sistema $(BA)\mathbf{x} = -B\mathbf{x}$.

56. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & k & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & k & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

    Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que $\det(BA^{-1}) = \det\left(\frac{1}{4}BA\right)$.

57. Determinar todas las matrices B que verifican

    a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

    b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

    c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

    d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

58. Determinar cuáles de las siguientes matrices son inversibles y exhibir la inversa cuando exista.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad G+H; \quad G\cdot H.$$

59. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Decidir si A^{-1} es solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

60. Determinar si el sistema tiene soluciones no triviales, sin resolverlo

$$a)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right. \qquad b)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & & & - & x_4 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

61. Determinar todos los valores de a, b y c para los cuales el sistema $\mathcal{S}$ es compatible.

$$\mathcal{S}: \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & a \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & b \\ 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & c \end{array}\right.$$

62. Encontrar todos los valores de a y b para los cuales $(2, 0, -1)$ es la única solución del sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & ax_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & - & bx_3 & = & 3 \\ & & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 3 \end{array}\right.$$

63. Hallar todos los valores de k para los cuales el conjunto de soluciones del siguiente sistema es $M = \{\lambda(1, 1, 0, 0) + (2, 0, -1, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 0 \\ & & (k^2-1)x_2 & & & + & 2x_4 & = & -k^2+1 \\ & & & & (k+1)x_3 & + & 4x_4 & = & -k-1 \end{array}\right.$$

64. Encontrar todos los valores de a y b para los cuales el sistema cuya matriz ampliada es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ -a & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -a & a & b \end{array}\right)$ tiene como conjunto de soluciones una recta.

65. Determinar a y b en $\mathbb{R}$ para que $(1, -1, 2, -1)$ sea solución del sistema cuya matriz ampliada es $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & a & 2 \\ -2b & -2 & 0 & 2 & 2 \\ a & -4 & -b & 5 & 4 \end{array}\right)$. Para los valores hallados, resolver el sistema.