Práctica 8: Integración

Integración en una variable (repaso)

1. Calcular:

   (a) $\displaystyle\int x\,\mathrm{sen}\,x\,dx.$ (c) $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx.$ (e) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2+x-2}\,dx.$

   (b) $\displaystyle\int \mathrm{sen}^2 x\cos x\,dx.$ (d) $\displaystyle\int e^x\mathrm{sen}\,x\,dx.$ (f) $\displaystyle\int \ln x\,dx.$

2. Hallar el área encerrada por las curvas:

   (a) $y = x^3$ e $y = x$.

   (b) $y = x^3 - x$ y la recta tangente a esta curva en $x = -1$.

   (c) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ y la recta $y = 12$ entre $x = 0$ y $x = 3$.

   (d) $y = \mathrm{sen}\,x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 2\pi$.

3. (a) Calcular $\displaystyle\int_{-2}^{0} e^x\,dx.$

   (b) Hallar el área encerrada por las curvas: $y = 0$, $y = -2$, $y = \log x$ y $x = 0$. Sugerencia: Dibujar la región y usar a).

4. Calcular:

   (a) $\displaystyle\int_{-2}^{3} x^2 - 1\,dx.$ (c) $\displaystyle\int_{-2}^{3} |x^2+1|\,dx.$

   (b) $\displaystyle\int_{-2}^{3} |x^2-1|\,dx.$ (d) $\displaystyle\int_{1}^{4} \sqrt{|x-3|}\,dx.$

Integrales impropias

5. (a) Para todos los valores reales de $p > 0$, estudiar la convergencia o divergencia de las integrales:

   i. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ ii. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^p}\,dx$ iii. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$

   Observación: Dividir los valores de p de la siguiente manera: $0 < p < 1$, $p = 1$ y $p > 1$.

(b) Relacionar los resultados obtenidos con el hecho de que para $x > 0$, x^{-p} y $x^{-\frac{1}{p}}$ son funciones inversas y, por lo tanto, el gráfico de una es el de la otra reflejado respecto de la recta $y = x$.

(c) ¿Para qué valores de $p > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge? En otras palabras, ¿para qué valores de p > 0 el límite $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^p}$ es finito?

6. Analizar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

(a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\,\ln^2 x}$.

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-kx}\, dx$.

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1 + x^2}\, dx$.

(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2}$.

(f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$.

(g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^3}$.

(h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1 + x^5}}\, dx$.

(i) $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{dx}{(1 - x)^3}$.

(j) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2 + \cos x}\, dx$.

(k) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen}(2x)\, dx$.

(l) $\displaystyle\int_0^{4} \frac{x}{x^2 - 4}\, dx$.

(m) $\int_1^2 \frac{e^x}{\sqrt{-x^3+3x^2-2x}}\, dx$.

En los ítems i), k) y l) estudiar, además, el valor principal.

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

(a) Si f es continua y positiva tal que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = a > 0$, entonces $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = +\infty$

(b) Si f es continua y positiva tal que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = a > 0$, entonces $\displaystyle\int_0^{-\infty} f(x)\, dx = -\infty$

(c) Si f es continua y decreciente con $\displaystyle\int_4^{+\infty} f(x)\, dx = 3$, entonces el $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(d) Si f es una continua y positiva con $\displaystyle\int_4^{+\infty} f(x)\, dx = 8$, entonces el $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(e) Si f es continua y positiva con $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, entonces $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx < +\infty$.

8. Para los distintos valores de $p \in \mathbb{R}$ analizar la convergencia de

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p(1 + x^2)}.$$

Integrales dobles

9. Evaluar cada una de las integrales siguientes si $R = [0, 1] \times [0, 1]$:

(a) $\displaystyle\iint_R (x^3+y^2)\,dxdy$.

(b) $\displaystyle\iint_R ye^{xy}\,dxdy$.

(c) $\displaystyle\iint_R (xy)^2\cos x^3\,dxdy$.

(d) $\displaystyle\iint_R \ln[(x+1)(y+1)]\,dxdy$.

(e) $\displaystyle\iint_R (x^m y^n)\,dxdy$, donde $m,n>0$.

(f) $\displaystyle\iint_R (ax+by+c)\,dxdy$.

(g) $\displaystyle\iint_R \operatorname{sen}(x+y)\,dxdy$.

(h) $\displaystyle\iint_R (x^2+2xy+yx^{1/2})\,dxdy$.

10. Calcular el volumen del sólido acotado por el plano xz, el plano yz, el plano xy, los planos $x=1$ y $y=1$, y la superficie $z=x^2+y^4$.

11. Sean f y g dos funciones continuas en $[a,b]$ y $[c,d]$, respectivamente. Mostrar que si consideramos el rectángulo $R=[a,b]\times[c,d]$ entonces

$$\iint_R [f(x)g(y)]\,dxdy = \Big(\int_a^b f(x)\,dx\Big)\Big(\int_c^d g(y)\,dy\Big).$$

12. Calcular el volumen del sólido acotado por la superficie $z=\operatorname{sen} y$, los planos $x=1,\ x=0,\ y=0,\ y=\pi/2$ y el plano xy.

13. Sean $F\in\mathcal{C}^2$ y $f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y)$. Calcular $\displaystyle\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dxdy$ en términos de F.

14. Graficar las regiones determinadas por los límites de integración de las siguientes integrales y calcular las integrales iteradas.

(a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{x^2} dydx$.

(b) $\displaystyle\int_1^2\int_{2x}^{3x+1} dydx$.

(c) $\displaystyle\int_0^1\int_1^{e^x} (x+y)\,dydx$.

(d) $\displaystyle\int_0^1\int_{x^3}^{x^2} y\,dydx$.

(e) $\displaystyle\int_{-3}^2\int_0^{y^2} (x^2+y)\,dxdy$

(f) $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y}\,dydx$.

(g) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{(1-x^2)^{1/2}} dydx$.

(h) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos x} y\operatorname{sen} x\,dydx$.

(i) $\displaystyle\int_0^1\int_{y^2}^{y} (x^n+y^m)\,dxdy$ $(m,n>0)$.

(j) $\displaystyle\int_{-1}^0\int_0^{2(1-x^2)^{1/2}} x\,dydx$.

(k) $\displaystyle\int_0^\pi\int_0^{\operatorname{sen} y} y\,dxdy$.

(l) $\displaystyle\int_{-2}^0\int_{x^3}^{x+1} (y^2+1)\,dydx$.

15. Sea $f:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional}\\ 2y, & \text{si } x \text{ no es racional}\end{cases}$$

Mostrar que la integral iterada $\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)\,dy\right] dx$ existe pero f no es integrable. ¿Existe la otra integral iterada?

16. Calcular el área de:

    (a) la región limitada por la recta $y = x$ y por la curva $y = x^2$.

    (b) la región formada por todos los puntos (x, y) tales que $|x| + |y| \leq a,\ a \geq 0$.

17. Calcular
$$\iint_T (x\mathrm{sen}\, x + y\mathrm{sen}\,(x+y))\, dxdy$$
siendo T el triángulo de vértices $(1,0)$, $(0,1)$ y $(3,3)$.

18. Sea D la región acotada por los semiejes positivos de x e y y la recta $3x + 4y = 10$. Calcular
$$\iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy.$$

19. Sea D la región acotada por el eje y y la parábola $x = -4y^2 + 3$. Calcular
$$\iint_D x^3 y\, dxdy.$$

20. Calcular el volumen de un cono de base de radio r y altura h.

21. Calcular el volumen de las siguientes regiones:

    (a) R: encerrada por la superficie $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 10$.

    (b) R: encerrada por el cono de altura 4 dado por $z^2 = x^2 + y^2$.

    (c) R: encerrada por las superficies $x^2 + y^2 = z$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

    (d) R: determinada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 10$ y $z \geq 2$.

22. En las integrales siguientes, cambiar el orden de integración, graficar las regiones correspondientes y evaluar la integral por los dos caminos.

    (a) $\int_0^1 \int_x^1 xy\, dydx.$

    (b) $\int_0^1 \int_1^{2-y} (x+y)^2\, dxdy.$

    (c) $\int_0^1 \int_{2x}^{3x} x^2 y\, dydx.$

    (d) $\int_{-1}^1 \int_{|y|}^1 (x+y)^2\, dxdy.$

    (e) $\int_{-3}^3 \int_{-(9-y^2)^{1/2}}^{(9-y^2)^{1/2}} x^2\, dxdy.$

23. Calcular $\int_D y^2 x^{1/2}\, dxdy$ donde
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > x^2, y < 10 - x^2\}$$

24. Sea D la región limitada por las rectas $y = 2$, $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$ e $y = 1$. Calcular la siguiente integral

$$\iint_D x^2 y \, dA$$

25. Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1; \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$ Calcular la siguiente integral

$$\iint_D \cos\left(\frac{x}{y}\right) \, dA$$

26. Calcular $\displaystyle\int_T e^{x-y} \, dxdy$ donde T es el triángulo con vértices $(0,0)$, $(1,3)$, y $(2,2)$.

27. Sea T la región "triangular" limitada por las rectas $y = x$, $y = \sqrt{2}$ y la curva $y = \sqrt{x}$. Calcular

$$\iint_R e^{\frac{x}{y}} \, dA.$$

Integrales triples

28. Calcular:

    (a) $\displaystyle\iiint_C (xyz + x^2y^2z^2) \, dV$, donde $C = [0,1] \times [-3,2] \times [-1,1]$.

    (b) $\displaystyle\iiint_C (x\cos z + y\cos x + z\cos y) \, dV$, donde $C = [0,\pi] \times [0,\pi] \times [0,\pi]$.

29. Calcular:

    (a) $\displaystyle\iiint_W x \, dV$, donde W es la región limitada por, $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$, $z = x^2+y^2$.

    (b) $\displaystyle\iiint_W x^2 \cos z \, dV$, donde W es la región limitada por, $z = 0$, $z = \pi$, $y = 0$, $x = 0$, $x + y = 1$.

    (c) $\displaystyle\iiint_W dV$, donde W es la región limitada por, $z = x^2 + 3y^2$ y $z = 9 - x^2$.

    (d) $\displaystyle\iiint_W (x + y + z) \, dV$, donde $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x,y,z)\| \leq 1\}$.

    (e) $\displaystyle\iiint_W (x^3 + y + z) \, dV$, donde $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0,1], x^2 + y^2 \leq 1\}$.

30. Calcular $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{2x} \int_{x+y}^{x^2+y^2} dzdydx$ y graficar la región de integración.

31. Cambiar el orden de integración en

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^y f(x,y,z)\, dzdydx$$

para obtener otras cinco formas de realizar la misma integración. Graficar la región de integración.

32. Sea $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x,y,z)\| \leq 1\}$. Demostrar que si f es una función continua en B, impar respecto de z (es decir $f(x,y,z) = -f(x,y,-z)$), entonces $\iiint_B f(x,y,z)\, dV = 0$. ¿Para que otras regiones vale este resultado? (dar ejemplos).

33. Sea W la región determinada por las condiciones $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ y $0 \leq z \leq xy$.

(a) Hallar el volumen de W.

(b) Calcular $\displaystyle\int_W x\, dxdydz$.

(c) Calcular $\displaystyle\int_W y\, dxdydz$.

(d) Calcular $\displaystyle\int_W z\, dxdydz$.

(e) Calcular $\displaystyle\int_W xy\, dxdydz$.