Análisis I – Matemática I – Análisis II (C) – Análisis Matemático I (Q)
Primer Cuatrimestre - 2019

Práctica 4:
Derivadas parciales de orden superior - Polinomio de Taylor

Derivadas de orden superior

1. Calcular las derivadas parciales de segundo orden para las siguientes funciones, verificando la igualdad de las derivadas parciales mixtas para aquellas funciones de clase C^2:

   (a) $f(x, y) = x^3y + e^{xy^2}$

   (b) $f(x, y, z) = ye^z + \frac{e^y}{x} + xy\,\mathrm{sen}(z)$

   (c) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} + \ln(z)$

2. Calcular todas las derivadas de tercer orden para las siguientes funciones:

   (a) $f(x, y, z) = xyz$

   (b) $f(x, y, z) = e^{xyz}$

   (c) $f(x, y, z) = \cos(x^2 + y) - \mathrm{sen}(y^2z)$

   (d) $f(x, y, z) = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1}$

3. Sea $f(x, y) = \cos(xy)$. Además, x e y son funciones de las variables u y v de acuerdo a las siguientes fórmulas: $x(u, v) = u + v$, $y(u, v) = u - v$. Calcular

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} f\left(x(u, v), y(u, v)\right) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^3}{\partial u \partial v^2} f\left(x(u, v), y(u, v)\right)$$

   (a) Sustituyendo

   (b) Usando la regla de la cadena.

Laplaciano - Función armónica

4. Se dice que una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^2 satisface la ecuación de Laplace o bien que es una función armónica en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ si:

$$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = \nabla^2 f \equiv 0 \text{ en } U$$

   Verificar que las siguientes funciones son armónicas en $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto. Determinar U en cada caso:

   (a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$

   (b) $f(x, y, z) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

   (c) $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

   (d) $f(x, y, z) = e^{3x+4}\cos(3z) + 4y$

5. Sean f, g dos funciones C^2 definidas en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ y tales que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

Probar que f y g son armónicas en U.

Polinomio de Taylor

6. (a) Desarrollar la función $p(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$ en potencias de $x - 2$;
   (b) Desarrollar la función $g(x) = \sqrt{x}$ en potencias de $x - 1$ hasta orden 3.
   (c) Hallar el polinomio de Maclaurin de grado tres para la función $f(x) = \ln(x+1)^2$.
   (d) Hallar el polinomio de Maclaurin de grado tres para la función $g(x) = e^{x+2}$.

7. (a) Hallar el polinomio de Maclaurin de orden 2 y la expresión del resto para la función $f(x) = \sqrt{1+x}$.
   (b) Evaluar el error de la igualdad aproximada $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$ cuando $x = 0,2$.

8. (a) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Hallar el polinomio de Maclaurin de grado n de la función $y = (1+x)^\alpha$.
   (b) Calcular el valor de $(1,3)^{2/3}$ con error menor que $1/100$.

9. Calcular:
   (a) el número e con error menor que 10^{-4};
   (b) $\ln \frac{2}{3}$ con error menor que 10^{-3}.

10. Calcular el polinomio de Taylor de segundo orden de las funciones dadas en el punto indicado. Escribir la forma de Lagrange del residuo.

a)	$f(x,y) = (x+y)^2$	en $(0,0)$
b)	$f(x,y) = e^{x+y}$	en $(0,0)$
c)	$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$	en $(0,0)$
d)	$f(x,y) = e^{(x-1)^2}\cos(y)$	en $(1,0)$
e)	$f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$	en $(1,\pi)$
f)	$f(x,y) = e^x \operatorname{sen}(y)$	en $(2,\frac{\pi}{4})$
g)	$f(x,y) = \ln(1+xy)$	en $(2,3)$
h)	$f(x,y) = x + xy + 2y$	en $(1,1)$
i)	$f(x,y) = x^y$	en $(1,2)$
j)	$f(x,y,z) = x + \sqrt{y} + \sqrt[3]{z}$	en $(2,3,4)$

11. Utilizando los resultados anteriores calcular $(0.95)^{2.01}$

    (a) con error menor que $1/200$.

    (b) con error menor que $1/5000$.

12. Sea $f(x, y) = xe^y$.

    (a) Calcular el polinomio de Taylor de orden 1 de f en el punto $P = (1, 0)$.

    (b) Usar este polinomio para aproximar el valor $f(0,98; 0,02)$. Estimar el error cometido.

13. Obtener la fórmula aproximada

$$\frac{\cos x}{\cos y} = 1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

para valores suficientemente pequeños de $|x|, |y|$.

14. (a) Calcular el polinomio de Taylor de grado 1 centrado en $(1, 1)$ de la función $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$

    (b) Usar la parte a) para evaluar $e^{\frac{4}{10}}$ usando que $\frac{4}{10} = (1 + \frac{1}{10})^2 - (1 - \frac{1}{10})^2$. Comprobar que el error que cometió es menor que 0.3

15. Calcular el polinomio de segundo grado que mejor aproxima en el origen a la función

$$f(x, y) = \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y).$$

16. Dada $f(x, y) = (x + 1, 2y - e^x)$ y sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable, tal que el polinomio de Taylor de grado 2 de $g \circ f$ en $(0, 0)$ es

$$4 + 3x - 2y - x^2 + 5xy.$$

Calcular $\nabla g(1, -1)$.

17. Sea $f(x, y) = e^{xy} \cos(x + y)$.

    (a) Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de f centrado en $(0, 0)$.

    (b) Calcular

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) + x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2}.$$

18. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^3 tal que su polinomio de Taylor de orden 3 en $(1, 1)$ es $p(x, y) = 1 - 3x + x^2 + xy + y^2 - y^3$. Analizar la existencia de los siguientes límites:

$$a) \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{f(x, y)}{\|(x, y) - (1, 1)\|}, \qquad b) \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{f(x, y)}{\|(x, y) - (1, 1)\|^2}.$$