ALGEBRA LINEAL - Práctica N°9 - Primer cuatrimestre de 2019

Variedades Lineales

Ejercicio 1. Probar que cada uno de los siguientes conjuntos es una variedad lineal, y calcular su dimensión:

i) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2\,x_1 - x_3 = 1 \text{ y } x_2 + x_3 = -2\}$.

ii) $M_2 = \{(1, 2, 3)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

iii) $M_3 = \{P \in \mathbb{Q}_3[X] \,/\, P'(2) = 1\}$.

iv) $M_4 = \{A \in \mathbb{C}^{2\times 2} \,/\, tr(A) = 5\}$.

Ejercicio 2.

i) Sea $L \subseteq \mathbb{R}^3$ la recta que pasa por los puntos $(2, -1, 0)$ y $(1, 3, -1)$. Hallar una variedad lineal M de dimensión 2 que contenga a L. ¿Es única M?

ii) Sea $\Pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + x_3 = 1\}$ y sea $L = \langle(0, 1, 1)\rangle + (1, 1, 0)$. Hallar una variedad lineal $M \subseteq \mathbb{R}^3$ de dimensión 2 tal que $M \cap \Pi = L$.

Ejercicio 3. Hallar ecuaciones implícitas para las siguientes variedades lineales:

i) $M = \langle(1, 2, 1), (2, 0, 1)\rangle + (1, 1, 1) \subseteq \mathbb{R}^3$.

ii) La mínima variedad lineal $M \subseteq \mathbb{R}^4$ que contiene a $(1, 1, 2, 0)$, $(2, 1, 1, 0)$ y $(-1, 0, 4, 1)$.

Ejercicio 4. Sea $L = \langle(2, 1, 1)\rangle + (0, -1, 1) \subseteq \mathbb{R}^3$.

i) Hallar un plano Π tal que $0 \in \Pi$ y $L \subseteq \Pi$.

ii) ¿Existirá un plano Π' tal que $L \subseteq \Pi'$, $0 \in \Pi'$ y $(0, 0, 1) \in \Pi'$ simultáneamente?

Ejercicio 5.

i) Encontrar en $\mathbb{R}^3$ dos rectas alabeadas que pasen por $(1, 2, 1)$ y $(2, 1, 1)$ respectivamente.

ii) Encontrar en $\mathbb{R}^4$ dos planos alabeados que pasen por $(1, 1, 1, 0)$ y $(0, 1, 1, 1)$ respectivamente.

iii) ¿Hay planos alabeados en $\mathbb{R}^3$? Más generalmente, si V es un K-espacio vectorial de dimensión n y M_1 y M_2 son variedades lineales alabeadas en V, ¿qué se puede decir de sus dimensiones?

Ejercicio 6.

i) Sea $L_1 = \langle(2, 1, 0)\rangle + (0, 0, 1)$. Hallar una recta $L_2 \parallel L_1$ que pase por el punto $(-1, 3, 0)$.

ii) Si L_1 y L_2 son las rectas de i), hallar un plano $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que $L_1 \subseteq \Pi$ y $L_2 \subseteq \Pi$ simultáneamente. ¿Es único Π ?

iii) Con las notaciones anteriores, hallar un plano $\Pi' \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que $\Pi \cap \Pi' = L_1$.

Ejercicio 7. En cada uno de los siguientes casos, decidir si las variedades lineales M_1 y M_2 se cortan, son paralelas o alabeadas. En cada caso, hallar $M_1 \cap M_2$, $M_1 \vee M_2$ y calcular todas las dimensiones:

i) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 - x_3 = 1\}$, $M_2 = \langle(1, 0, 1)\rangle + (0, 0, -3)$.

ii) $M_1 = \langle(1, 2, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\rangle + (1, 2, 2, -1)$, $M_2 = \langle(1, 0, 1, 1), (2, 2, 1, 0)\rangle + (-1, 4, 2, -3)$.

iii) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - 1 = x_3 + x_4 = 0\}$,
$M_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 = x_2 + x_3 + x_4 - 1 = 0\}$.

Ejercicio 8. Sean
$M_1 = \langle(1, 1, 1)\rangle + (0, 2, 0)$ y $M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = x_1 - x_2 + x_3 = 1\}$.

i) Hallar planos Π_1 y Π_2 de $\mathbb{R}^3$ tales que $M_1 \subseteq \Pi_1$, $M_2 \subseteq \Pi_2$ y $\Pi_1 \parallel \Pi_2$ simultáneamente.

ii) Hallar $M_1 \cap M_2$ y $M_1 \vee M_2$ y calcular sus dimensiones.

Ejercicio 9. Sean $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ las rectas definidas por

$$L_1 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 3x_3 = 0\,,\ x_2 - x_3 = -2\right\},$$
$$L_2 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 6x_3 = 1\,,\ x_2 + 2x_3 = 0\right\}.$$

Hallar una recta $L \subseteq \mathbb{R}^3$ que pase por el punto $(1, 0, 2)$ y corte a L_1 y a L_2.

Ejercicio 10. Sean $A = (1, 1, 2)$ y $B = (2, 0, 2)$. Sea $\Pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 2\}$. Hallar $C \in \Pi$ tal que A, B y C formen un triángulo equilátero. ¿La solución es única?

Ejercicio 11. Dado el triángulo PQR, se llama *mediana correspondiente al vértice* P a la recta que pasa por dicho vértice y por el punto medio del lado $\overline{QR}$.
Se considera en $\mathbb{R}^2$ el triángulo cuyos vértices son $P = (0, 0)$, $Q = (c, 0)$ y $R = (a, b)$.

i) Probar que sus tres medianas se cortan en un punto M.

ii) Probar que si $d(M, P) = d(M, Q) = d(M, R)$, el triángulo PQR es equilátero.

Ejercicio 12. Sean A_1, A_2 y A_3 en $\mathbb{R}^3$ tres puntos no alineados. Probar que el conjunto

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 : d(x, A_1) = d(x, A_2) = d(x, A_3)\}$$

es una recta ortogonal al plano que contiene a A_1, A_2 y A_3. Calcular S en el caso $A_1 = (1, -1, 0)$, $A_2 = (0, 1, 1)$ y $A_3 = (1, 1, 2)$.

Ejercicio 13. Sea $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proyección ortogonal, para el producto interno canónico, sobre el subespacio $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 = 0\}$.

i) Encontrar una recta $L \subset \mathbb{R}^3$ tal que $P(L) = (1, 2, 1)$. ¿Es única?

ii) Encontrar una recta $L_1 \subset \mathbb{R}^3$ tal que $P(L_1) = L_2$ siendo $L_2 : \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$. ¿Es única?

Ejercicio 14. Hallar en $\mathbb{R}^n$ el complemento ortogonal a M que pasa por A, la proyección ortogonal de A sobre M y $d(A, M)$ en los siguientes casos:

i) $n = 3, \quad M : \begin{cases} 3x_1 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 = -1, \end{cases} \quad A = (1, 0, 0),$

ii) $n = 4, \quad M : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_4 = 2, \end{cases} \quad A = (0, 2, 0, -1).$

Ejercicio 15. Dado en $\mathbb{R}^2$ el triángulo de vértices $A = (2, -3)$, $B = (8, 5)$ y $C = (14, 11)$, hallar la longitud de la altura que pasa por el vértice A.

Ejercicio 16. Sean en $\mathbb{R}^3$ los puntos $P_1 = (1, -1, 0)$ y $P_2 = (1, 1, 1)$. Encontrar tres planos H distintos tales que $d(P_1, H) = d(P_2, H)$.

Ejercicio 17. Sean en $\mathbb{R}^3$ la recta $L = \langle(1, 1, 2)\rangle$ y el punto $P = (1, 0, -2)$. Encontrar un plano H ortogonal a L tal que $d(P, H) = \sqrt{6}$.

Ejercicio 18.

i) Calcular el ángulo entre las rectas de $\mathbb{R}^2$ definidas por $L_1 : x_1 - x_2 = 1$ y $L_2 : x_1 + x_2 = 3$.

ii) Hallar una recta L_3 tal que $\measuredangle(L_1, L_2) = \measuredangle(L_2, L_3)$ y $L_1 \cap L_2 \in L_3$.

Ejercicio 19. Sea $L \subset \mathbb{R}^3$ la recta $L = \langle(1, -1, 1)\rangle + (2, 1, 0)$. Encontrar un plano $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ tal que $(2, 1, 0) \in \Pi$ y $\measuredangle(L, \Pi) = \frac{\pi}{4}$.

Ejercicio 20. Hallar la distancia entre M_1 y M_2 en los siguientes casos:

i) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 + x_3 = 1\}$
$M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 + x_3 = 3\}$.

ii) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 1\,,\, x_1 - x_3 = 0\}$,
$M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\,,\, x_3 = 1\}$.

iii) $M_1 = \langle(1, -1, 0), (2, 1, 1)\rangle + (1, 0, 0)$
$M_2 = \{(3, 0, 1)\}$.

iv) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 = -2\,,\, x_2 - 2x_4 = 2\}$,
$M_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\,,\, x_2 - 2x_4 = -8\,,\, x_1 - x_2 + x_4 = 5\}$.

Ejercicio 21. Demostrar que si M_1 y M_2 son variedades lineales de $\mathbb{R}^n$ con $\dim M_1 \leq \dim M_2$ y $M_1 \parallel M_2$, entonces $d(M_1, M_2) = d(P, M_2)$ para todo $P \in M_1$.

Ejercicio 22.

i) Sea L la recta de $\mathbb{R}^2$ que pasa por los puntos $(2, -1)$ y $(5, 3)$. Determinar una recta $L' \parallel L$ tal que $d(L, L') = 2$.

ii) Sean $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + x_3 = 1\}$ y $M_2 = (1, 1, 1) + \langle(0, 1, 1), (1, 0, -2)\rangle$. Hallar un plano H tal que $M_i \parallel H$ $(i = 1, 2)$ y $d(M_1, H) = d(M_2, H)$.

Ejercicio 23. Sean en $\mathbb{R}^3$ la recta $L = \langle(1, 2, -2)\rangle + (0, 2, 0)$ y el punto $P = (1, 2, 2)$. Encontrar ecuaciones implícitas de una recta L' ortogonal a L tal que $d(P, L') = 3$ y $L \cap L' = \emptyset$. ¿Es única?

Ejercicio 24. Sea $L = \langle(3, 0, -4)\rangle + (1, -1, 0)$. Encontrar una recta L', alabeada con L, tal que $d(L, L') = 2$.

Ejercicio 25.

i) Construir una rotación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(M_1) = M_2$ en cada uno de los siguientes casos:

  a) $M_1 = \{(1, 2, -1)\}$, $\quad M_2 = \{(-1, 2, 1)\}$.

  b) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 2,\ x_3 = 1\}$,
  $M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 = 1,\ 3x_2 - x_3 = -4\}$.

  c) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - x_2 + x_3 = 3\}$,
  $M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - x_2 + x_3 = -3\}$.

ii) Encontrar variedades lineales M_1 y M_2 de $\mathbb{R}^3$ de igual dimensión tales que no haya ninguna rotación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumpla $f(M_1) = M_2$.

Ejercicio 26. Sean en $\mathbb{R}^3$ los planos Π_1 y Π_2 definidos por las ecuaciones:

$$\Pi_1 : x_2 - x_3 = 1 \qquad \text{y} \qquad \Pi_2 : x_2 + x_3 = -1.$$

Definir una transformación ortogonal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(\Pi_1) = \Pi_2$ y $f(\Pi_2) = \Pi_1$.

Ejercicio 27. Sea $k \in \mathbb{R}$ y sean Π_1 y Π_2 los planos en $\mathbb{R}^3$ definidos por

$$\Pi_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + 2x_3 = k\} \quad \text{y} \quad \Pi_2 = \langle(1, 0, 1), (0, 1, 2)\rangle + (1, -1, 1).$$

Determinar k para que exista una simetría $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(\Pi_1) = \Pi_2$. Para ese valor de k hallar dicha simetría y calcular $f(\Pi_2)$.
