

ALGEBRA LINEAL - Práctica N°7 - Primer cuatrimestre de 2019**Subespacios invariantes - Forma de Jordan****Ejercicio 1.**

- i) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $f(x, y) = (x + 2y, 2x - 2y)$. Hallar todos los subespacios de \mathbb{R}^2 que sean f -invariantes.
- ii) Sea $\theta \in \mathbb{R}$ y $g_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación \mathbb{R} -lineal cuya matriz en la base canónica es

$$|g_\theta|_E = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

(ver ejercicio 2 (iii) Práctica 3). Para cada θ estudiar si g_θ es diagonalizable, y hallar todos los subespacios de \mathbb{R}^2 que sean g_θ -invariantes. ¿Qué cambia si g_θ se interpreta en \mathbb{C}^2 y \mathbb{C} -lineal?

Ejercicio 2. Sean $A, A' \in K^{n \times n}$ las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

- i) Probar que ambas son nilpotentes y que A es semejante a A' .
- ii) Dar bases B y B' de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tales que la matriz de la derivación en la base B sea A y en la base B' sea A' .
- iii) Sea B una base de K^n y sea $f : K^n \rightarrow K^n$ tal que $|f|_B = A$. Probar que no existen subespacios propios f -invariantes S y T de K^n tales que $K^n = S \oplus T$.

Definiciones: Dados $v \in K^n$ y $A \in K^{n \times n}$, escribimos $\langle v \rangle_A = \langle v, Av, A^2v, \dots \rangle$. Decimos que v es un *vector cíclico para A* si $\langle v \rangle_A = K^n$. Si V es un espacio vectorial, $v \in V$ y $f : V \rightarrow V$ es una transformación lineal, definimos $\langle v \rangle_f$ por $\langle f^i(v) : i \geq 0 \rangle$ y decimos que v es *f -cíclico* si $\langle v \rangle_f = V$.

Ejercicio 3. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Existe $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{R}^3 = \langle v \rangle_A$?

Ejercicio 4. Si $f : K^n \rightarrow K^n$ es una transformación lineal tal que f^2 tiene un vector cíclico (es decir, $K^n = \langle v \rangle_{f^2}$), probar que f tiene un vector cíclico. ¿Es válida la recíproca?

Ejercicio 5. Hallar la forma y una base de Jordan para cada una de las siguientes matrices:

$$\text{i) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ii) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6. Sean $A_i \in \mathbb{C}^{8 \times 8}$ ($1 \leq i \leq 6$) matrices en nilpotentes tales que $m_{A_i} = X^3$ ($1 \leq i \leq 6$). ¿Es cierto que necesariamente dos de estas matrices son semejantes?

Ejercicio 7. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$ nilpotentes tales que $m_A = m_B$ y $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$. Probar que A y B son semejantes. ¿Es cierto esto en $\mathbb{C}^{7 \times 7}$?

Ejercicio 8. Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq j, \\ 1 & \text{si } i > j. \end{cases}$$

Ejercicio 9.

- i) Decidir si existe $A \in \mathbb{C}^{8 \times 8}$ nilpotente tal que $\text{rg}(A) = 6$, $\text{rg}(A^2) = 4$, $\text{rg}(A^3) = 3$, $\text{rg}(A^4) = 1$ y $\text{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.
- ii) Decidir si existe $A \in \mathbb{R}^{16 \times 16}$ tal que $m_A(X) = X^5$, $\text{rg}(A) = 9$, $\text{rg}(A^2) = 5$, $\text{rg}(A^3) = 3$, $\text{rg}(A^4) = 1$ y $\text{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.

Ejercicio 10. Sea $f : \mathbb{C}^7 \rightarrow \mathbb{C}^7$ una transformación lineal y sea B una base de \mathbb{C}^7 tal que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- i) Hallar \mathcal{X}_f y m_f .
- ii) Sea λ un autovalor de f y sea $m = \text{mult}(\lambda, \mathcal{X}_f)$. Se definen $E_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^7 : f(v) = \lambda v\}$ y $V_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^7 : (\lambda Id - f)^m(v) = 0\} = \text{Nu}((\lambda Id - f)^m)$.
¿Para qué autovalores λ de f se tiene que $E_\lambda = V_\lambda$?
- iii) Para cada autovalor λ de f , ¿cuál es la menor potencia k tal que $V_\lambda = \text{Nu}((\lambda Id - f)^k)$?
- iv) Si λ es un autovalor de f , se nota f_λ a la restricción de $\lambda Id - f$ a V_λ . Calcular $\dim(\text{Im}(f_\lambda))$ y $\dim(\text{Im}(f_\lambda^2))$ para cada λ .

Ejercicio 11. Sea V un K -espacio vectorial, sea $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal y sea $P \in K[X]$.

- i) Probar que $\text{Nu}(P(f))$ e $\text{Im}(P(f))$ son subespacios invariantes por f .
- ii) Probar que si un autovalor λ de f es raíz de P , entonces $E_\lambda \subseteq \text{Nu}(P(f))$.
- iii) Probar que si un autovalor λ de f no es raíz de P , entonces $E_\lambda \subseteq \text{Im}(P(f))$.

Ejercicio 12. Hallar la forma y una base de Jordan de cada una de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 13. Sea $V \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$ el subespacio $V = \langle e^x, x e^x, x^2 e^x, e^{2x} \rangle$. Sea $\delta : V \rightarrow V$ la transformación lineal definida por $\delta(f) = f'$. Hallar la forma y una base de Jordan para δ .

Ejercicio 14. Si $A, B \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ son las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

decidir si A y B son semejantes.

Ejercicio 15. Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Probar que A y A^t son semejantes.

Ejercicio 16. Encontrar todas las formas de Jordan posibles de la matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ en cada uno de los siguientes casos:

- i) $\chi_A(X) = (X - 2)^4(X - 3)^2$; $m_A(X) = (X - 2)^2(X - 3)^2$.
- ii) $\chi_A(X) = (X - 7)^5$; $m_A(X) = (X - 7)^2$.
- iii) $\chi_A(X) = (X - 2)^7$; $m_A(X) = (X - 2)^3$.
- iv) $\chi_A(X) = (X - 3)^4(X - 5)^4$; $m_A(X) = (X - 3)^2(X - 5)^2$.

Ejercicio 17. Sea $A \in \mathbb{C}^{15 \times 15}$ una matriz con autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ que cumple, simultáneamente, las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(A - \lambda_1 I) &= 13, & \operatorname{rg}(A - \lambda_1 I)^2 &= 11, & \operatorname{rg}(A - \lambda_1 I)^3 &= 10, & \operatorname{rg}(A - \lambda_1 I)^4 &= 10, \\ \operatorname{rg}(A - \lambda_2 I) &= 13, & \operatorname{rg}(A - \lambda_2 I)^2 &= 11, & \operatorname{rg}(A - \lambda_2 I)^3 &= 10, & \operatorname{rg}(A - \lambda_2 I)^4 &= 9, \\ \operatorname{rg}(A - \lambda_3 I) &= 13, & \operatorname{rg}(A - \lambda_3 I)^2 &= 12, & \operatorname{rg}(A - \lambda_3 I)^3 &= 11. \end{aligned}$$

Hallar su forma de Jordan.

Ejercicio 18. Dar la forma de Jordan de una matriz $A \in \mathbb{C}^{14 \times 14}$ que verifica, simultáneamente:

$$\begin{aligned} m_A &= (X - \lambda_1)^2(X - \lambda_2)(X - \lambda_3)^2(X - \lambda_4)^3 \quad (\text{con } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ si } i \neq j), \\ \operatorname{rg}(A - \lambda_1 I) &= 11, \quad \operatorname{rg}(A - \lambda_1 I)^2 = 10, \quad \operatorname{rg}(A - \lambda_3 I) = 12, \quad \operatorname{rg}(A - \lambda_3 I)^2 = 10 \text{ y} \\ \operatorname{rg}(A - \lambda_4 I) &= 13. \end{aligned}$$

Ejercicio 19. Sean $x, y \in \mathbb{C}^n$ y $A(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ con $a_{ij} = x_i y_j$.

- i) Calcular todos los autovalores y autovectores de A .
- ii) Calcular las posibles formas de Jordan de A .

Ejercicio 20. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, encontrar $B \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ tal que $B^2 = A$.

Ejercicio 21. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se define una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha, & a_1 = \beta, \\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n & (n \in \mathbb{N}_0). \end{cases}$$

Hallar una fórmula para el término general a_n para cada $n \in \mathbb{N}_0$.

Ejercicio 22. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) - x_2(t), \\ x_2'(t) = x_1(t) + x_2(t), \\ x_3'(t) = -x_2(t) + 2x_3(t), \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$, $x_3(0) = 1$.
