Álgebra II
Segundo Cuatrimestre — 2017

Práctica 6: El teorema de estructura para módulos finitamente generados sobre un dominio de ideales principales

1. Sea p un primo positivo. Clasificar todos los grupos abelianos de orden p^2, p^3, p^4 y p^5.

2. Clasificar los grupos abelianos de orden 18, 45, 100 y 180.

3. Sea G un grupo abeliano finito y sea p un primo positivo que divide al orden de G. Probar que el número de elementos de orden p en G es coprimo con p.

4. Calcular los coeficientes de estructura de los siguientes grupos abelianos:

(*a*) $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_9$.

(*b*) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{14}$.

(*c*) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{49} \oplus \mathbb{Z}$.

(*d*) $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{21} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_7$.

(*e*) Un grupo abeliano G de orden 36 que tiene exactamente 2 elementos de orden 3 y que no tiene elementos de orden 4.

(*f*) Un grupo abeliano G de orden 225 que tiene por lo menos 40 elementos de orden 15 y tal que todo subgrupo de orden 9 de G es isomorfo a $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$.

5. Calcular los coeficientes de estructura de los siguientes cocientes:

(*a*) $\mathbb{Z}^4/S$ con $S = \{m \in \mathbb{Z}^4 : m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0,\ m_1 + m_2 - 2m_3 = 0\}$.

(*b*) $\mathbb{Z}^3/S$ con $S = \{m \in \mathbb{Z}^3 : m_1$ es par, $m_1 + 5m_2 - m_3 = 0\}$.

(*c*) $\mathbb{Z}^3/S$ con $S = \{m \in \mathbb{Z}^3 : m_1 = m_2 + m_3$ es par, $3|m_3\}$.

6. Caracterizar los $\Bbbk[X]$-módulos de dimensión 1, 2 y 3 sobre $\Bbbk$, para $\Bbbk = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

7. Sea $G \subseteq \mathbb{Z}^n$ un subgrupo.

(*a*) Probar que $[\mathbb{Z}^n : G]$ es finito si y solo si G tiene rango n.

(*b*) Si G tiene rango n y $\{g_1, \dots, g_n\}$ es una base de g, sea $M \in M_n(\mathbb{Z})$ la matriz que tiene a g_i como i-ésima columna. Probar que $[\mathbb{Z}^n : G] = |\det M|$.

8. Sea A un dominio principal y sea M un A-módulo finitamente generado. Probar:

(*a*) M es de torsión $\iff \operatorname{Hom}_A(M, A) = 0$.

(*b*) M es indescomponible (es decir, no tiene sumandos directos propios) $\iff$ $M \cong A$ o existe $p \in A$ irreducible y $n \in \mathbb{N}$ tales que $M \cong \frac{A}{\langle p^n \rangle}$

9. Sea A un dominio principal y sea M un A-módulo. Probar:

(*a*) Si M es finitamente generado y S es un submódulo libre de M tal que $\frac{M}{S}$ es sin torsión, entonces M es libre.

(*b*) Si M no es de torsión y $\frac{M}{S}$ es finitamente generado con torsión para todo submódulo $S \neq 0$ de M , entonces $M \cong A$. Deducir que si G es un grupo abeliano infinito tal que todo subgrupo no nulo tiene índice finito, entonces $G \cong \mathbb{Z}$.