Álgebra II

Primer Cuatrimestre — 2019

Práctica 2: Grupos — Segunda parte

Cocientes

Sea G un grupo y sean X, Y subconjuntos no vacíos de G. Se define

$$X \cdot Y = XY = \{x \cdot y : x \in X, y \in Y\}.$$

Si $x \in G$ escribimos $xH = \{x\}H$.

1. Sea G un grupo y H, K subgrupos de G.

(a) Probar que si H ó K es normal, entonces HK es un subgrupo.

(b) Si H y K son normales, entonces HK es un subgrupo normal.

(c) Dar un ejemplo de un grupo G y dos subgrupos H y K tales que HK no sea un subgrupo.

2. Hallar un sistema de representantes de G módulo S en los siguientes casos y determinar $|G : S|$

(a) $G = \mathbb{R}, \quad S = \mathbb{Z}$

(b) $G = \mathbb{D}_n, \quad S = \langle r \rangle$

(c) $G = GL_n(K), \quad S = SL_n(K), \quad$ donde K es un cuerpo.

(d) $G = \mathbb{C}^\times, \quad S = S^1$

3. Calcular los siguientes cocientes:

(a) $\dfrac{\mathbb{C}^\times}{\mathbb{R}_{>0}}$

(b) $\dfrac{\mathbb{Z}^\times}{m\mathbb{Z}}$

(c) $\dfrac{\mathbb{Q}^\times}{\mathbb{Q}_{>0}}$

(d) $\dfrac{S^1}{G_n}$

(e) $\dfrac{G_n}{G_m}$ para $m \mid n$

4. Verificar que $H \triangleleft G$ y calcular G/H en cada caso.

(a) $G = \mathbb{S}_4, \quad H = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.

(b) $G = \mathbb{D}_6, \quad H = \{1, \rho^3\}$.

5. (a) Sea $f : G \longrightarrow G'$ un epimorfismo y sea $H \triangleleft G$. Si $H' = f(H)$, probar que

1. $H' \triangleleft G'$
2. Si f es un isomorfismo, $G/H \simeq G'/H'$

(b) Si $G \simeq G'$, $H \simeq H'$, $H \triangleleft G$ y $H' \triangleleft G'$, > es $G/H \simeq G'/H'$?

6. Sea G un grupo y sean H, K subgrupos normales de G. Sean π_H y π_K las proyecciones de G en H y K respectivamente. Probar que la aplicación

$$f : G/(H \cap K) \to G/H \times G/K$$

definida por $f(\overline{x}) = (\pi_H(x), \pi_K(x))$ es un monomorfismo.

7. Sea G un grupo. Sea $a \in G$ y sea $I_a : G \longrightarrow G$ definida por $I_a(g) = a.g.a^{-1}$.

(a) Probar que I_a es un automorfismo de G (se denomina automorfismo interior de G).

(b) Probar que la aplicación $I : G \longrightarrow \mathsf{Aut}(G)$, definida por $I(a) = I_a$, es un morfismo de grupos y verificar que

$$\ker(I) = \{a \in G \,:\, ag = ga, \forall g \in G\}.$$

Este subgrupo se llama el *centro de* G y lo notamos $\mathcal{Z}(G)$.

(c) Probar que $\mathrm{im}(I)$ es un subgrupo normal de $\mathsf{Aut}(G)$. A este grupo lo notaremos $\mathrm{Int}(G)$.

(d) Deducir que $G/\mathcal{Z}(G) \simeq \mathrm{Int}(G)$.

8. Sea G un grupo. Definimos $[G, G]$, el *conmutador de* G, como el subgrupo de G generado por todos los elementos de la forma $[x, y] = ghg^{-1}h^{-1}$, $g, h \in G$.

(a) Probar que $G/[G, G]$ es un grupo abeliano.

(b) Sea $f : G \to K$ un morfismo donde K es un grupo abeliano. Probar que f se factoriza unívocamente por $G/[G, G]$, esto es, existe un único morfismo $\overline{f} : G/[G, G] \to K$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & K \\
G/[G,G] \arrow[ur, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

(c) Sea $H \subset G$ un subgrupo. Probar que,
$[G, G] \subseteq H \Leftrightarrow H \lhd G$ y G/H es abeliano.

9. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas.

(a) Si $|G : H| = 2$ y H es abeliano entonces $H \subset \mathcal{Z}(G)$.

(b) Si $|G| = n$ y k divide a n, entonces G tiene un elemento de orden k.

(c) Si $|G| = n$ y k divide a n, entonces G tiene un subgrupo de orden k.

(d) Si $\forall x \in G$, se tiene que $ord(x) < \infty \Rightarrow |G| < \infty$.

(e) Si $p||G|$, entonces existe H subgrupo tal que $|G : H| = p$.

(f) Los elementos de orden finito de un grupo G forman un subgrupo.

Productos directos y semidirectos

1. Sea G un grupo y sean H y K dos subgrupos de G. Probar que son equivalentes:

(a) Todo elemento de G se escribe de manera única como un producto hk con $h \in H$ y $k \in K$.

(b) $G = HK$ y $H \cap K = 1$.

2. Sean G y H dos grupos. Determinar $\mathsf{Z}(G \times H)$.

3. Sean $m, n \in \mathbb{Z}$ coprimos y sea G un grupo de orden mn. Probar que si G posee exactamente un subgrupo N de orden n y exactamente un subgrupo M de orden m, entonces G es isomorfo al producto directo de N y M.

4. Probar que:

(a) $\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ si m y n son coprimos (Teorema chino del resto);

(b) $\mathbb{C}^\times \cong \mathbb{R}_{>0} \times S^1$;

(c) $D_6 \cong S_3 \times \mathbb{Z}_2$.

5. Sean $f : H \to H'$ y $g : K \to K'$ dos morfismos de grupos. Probar que la función $f \times g : H \times K \to H' \times K'$ definida por $(h, k) \mapsto (f(h), g(k))$ es un morfismo de grupos.

6. Sean H y K dos grupos y sean $S \trianglelefteq H$ y $T \trianglelefteq K$. Probar que $S \times T \trianglelefteq H \times K$ y que

$$\frac{H \times K}{S \times T} \cong (H/S) \times (K/T)\,.$$

Sugerencia. Sean $\pi_S : H \to H/S$ y $\pi_T : K \to K/T$ las proyecciones. Considerar $\pi_S \times \pi_T$ y usar el 1[er] teorema de isomorfismo.

7. *Producto semidirecto.* Sean H y K grupos y sea $\theta : K \to \mathrm{Aut}(H)$ un morfismo de grupos.

(a) Sea $G = H \times K$ como conjunto, y consideremos el producto en G dado por

$$(h,k)\cdot(h',k') = (h\theta(k)(h'), kk'), \qquad \forall (h,k),(h',k') \in G.$$

Mostrar que, con respecto a este producto, G es un grupo. Llamamos a este grupo el *producto semidirecto externo de H por K con respecto a θ* y lo notamos $H \rtimes_\theta K$.

(b) Sean $\widetilde{H} = \{(h,1) \in H \rtimes_\theta K \mid h \in H\}$ y $\widetilde{K} = \{(1,k) \in H \rtimes_\theta K \mid k \in K\}$. Probar que $\widetilde{H}$ y $\widetilde{K}$ son subgrupos de $H \rtimes_\theta K$ tales que $\widetilde{H} \trianglelefteq H \rtimes_\theta K$, $\widetilde{H} \cap \widetilde{K} = 1$ y $\widetilde{H}\widetilde{K} = H \rtimes_\theta K$.

(c) Mostrar que si $\theta = 1$ es el morfismo trivial, $H \rtimes_\theta K = H \times K$ es simplemente el producto directo.

Definición. *Sea G un grupo y sean H y K subgrupos de G. Decimos que G es el* producto semidirecto interno de H por K *si $H \trianglelefteq G$, $H \cap K = 1$ y $HK = G$.*

8. Sea G un grupo y sean H y K subgrupos de G tales que G es el producto semidirecto interno de H por K.

(a) Probar que la fórmula $\theta(k)(h) = khk^{-1}$ define un morfismo de grupos $\theta : K \to \mathrm{Aut}(H)$.

(b) Probar que la fórmula $(h,k) \mapsto hk$ define un isomorfismo de grupos $H \rtimes_\theta K \xrightarrow{\cong} G$.

9. Sea G un grupo y sean H y K subgrupos de G tales que $G = H \rtimes K$.

(a) Probar que si $K \triangleleft G$ entonces $kh = hk$, $\forall h \in H$, $\forall k \in K$.

(b) Deducir que G es abeliano si y sólo si H y K son abelianos y $K \triangleleft G$.

10. Determinar si existe un grupo K tal que $G \cong H \rtimes K$ en cada uno de los siguientes casos.

(a) $G = \mathbb{C}^\times$, $\quad H = S^1$

(b) $G = G_{12}$, $\quad H = G_3$

(c) $G = G_{12}$, $\quad H = G_2$

(d) $G = \mathbb{C}$, $\quad H = \mathbb{R}$

(e) $G = GL(n,\mathbb{C})$, $\quad H = SL(n,\mathbb{C})$

(f) $G = \mathbb{S}_4$, $\quad H = \{1, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$

11. Sean $H = \mathbb{Z}_3$ y $K = \mathbb{Z}_4$.

(a) Describir todos los productos semidirectos $G = H \rtimes_\varphi K$.

(b) Mostrar que uno de estos es no abeliano y no isomorfo a $\mathbb{A}_4$.

12. Mostrar que S_n es el producto semidirecto de A_n por $\langle(1\,2)\rangle$.

13. Probar que $\mathrm{GL}_n(k)$ es un producto semidirecto de $\mathrm{SL}_n(k)$ por $k^\times$.

14. Mostrar que $\mathbb{H}$ no puede ser escrito como un producto semidirecto de forma no trivial.

15. Sean G y N dos grupos y sean $\theta, \tau : G \to \mathrm{Aut}(N)$ morfismos. Probar que si existe $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ tal que $\theta = \tau \circ \varphi$, entonces $N \rtimes_\theta G \cong N \rtimes_\tau G$.

Acciones de grupos

En todos los ejercicios las acciones son a izquierda.

16. Sean G un grupo, $r \in \mathbb{N}$ y X el conjunto de todos los subgrupos de G de orden r. Probar que la siguiente fórmula define una acción de G en X: $g \cdot H = gHg^{-1}$.

17. Sean G un grupo, $H \leq G$ y $X = G/H$. Probar que la siguiente fórmula define una acción de G en X: $g \cdot xH = (gx)H$.

18. Sea G un grupo finito y sean H y K subgrupos de G. Sea $X = HK$.

(a) Probar que la siguiente fórmula define una acción de $H \times K$ en X: $(h, k) \cdot x = hxk^{-1}$.
(b) Probar que $\mathcal{O}(1) = X$ y probar que el estabilizador del 1 es isomorfo a $H \cap K$.
(c) Deducir de lo anterior que $|H||K| = |HK||H \cap K|$.

19. *Subgrupos grandes.* El objetivo de este ejercicio es probar el siguiente resultado.

> **Proposición.** *Sea G un grupo finito, sea p el menor número primo que divide a $|G|$, y sea H un subgrupo de G de índice p. Entonces H es normal en G.*

(a) Sea $X = G/H = \{gH : g \in G\}$ el conjunto de coclases a izquierda de H en G; notar que $|X| = p$. Consideramos en X la acción usual de G por multiplicación a izquierda,

$$\alpha : G \times X \to X, \quad (g', gH) \mapsto g'gH.$$

Sea $\widetilde{\alpha} : G \to S_X$ el morfismo de grupos correspondiente y sea $K = \ker(\widetilde{\alpha})$. Mostrar que $H \supseteq K$ y deducir que $|G : K|$ divide a $p!$.

(b) Mostrar que $|G : K| = |G : H|$. Concluir que $H = K$ y por lo tanto H es normal.

Sugerencia. Para hacerlo, observar primero que $p = |G : H| \leq |G : K|$, de manera que $|G : K| \neq 1$. Si q es un primo que divide a $|G : K|$, lo hecho en la parte anterior implica que $q \leq p$; esto junto con la elección de p implica que $|G : K| = p^r$ para algún $r \geq 1$. Para terminar, mostrar que $r = 1$.

p-Grupos

En toda esta sección $p \in \mathbb{N}$ es un número primo.

Definición. *Sea G un grupo. Un elemento de G se dice* p-primario *si su orden es una potencia de p. Un* p-grupo *es un grupo tal que todo elemento es p-primario.*

20. Probar las siguientes afirmaciones.

(a) Si G es un p-grupo y H es un subgrupo de G, entonces H es un p-grupo.
(b) Si G es un p-grupo y $f : G \to H$ es un morfismo sobreyectivo, entonces H es un p-grupo.
(c) Si G es un grupo, H un subgrupo normal de G y tanto H como G/H son p-grupos, entonces G es un p-grupo.

21. Un grupo finito G es un p-grupo sii $|G| = p^r$ para algún $r \geq 1$.

22. Sea G un grupo.

(a) Probar que si G es un p-grupo finito entonces $\mathcal{Z}(G) \neq 1$.
(b) Probar que si $G/\mathcal{Z}(G)$ es cíclico entonces G es abeliano.
(c) Probar que si $|G| = p^2$ con p primo entonces G es abeliano.
(d) Caracterizar todos los grupos de orden p^2.
(e) Dar un ejemplo de un grupo G no abeliano tal que $G/\mathcal{Z}(G)$ sea abeliano.

23. Sea p un primo. Sea G un grupo no abeliano tal que $|G| = p^3$. Probar que $\mathcal{Z}(G) = [G; G]$ y calcular $|\mathcal{Z}(G)|$.

24. Probar que los únicos grupos no abelianos de orden 8 son $\mathcal{H}$ y $\mathbb{D}_4$.

25. Sea p un primo mayor o igual que 3. Si $|G| = 2p$ entonces G es abeliano o $G \simeq \mathbb{D}_p$.

Teoremas de Sylow

26. Hallar todos los subgrupos de Sylow de D_n.

27. Mostrar que no hay grupos simples de orden 28 o 312.

28. Mostrar que un grupo de orden 12 o 56 no es simple.

29. Probar que todo grupo de orden 5.7.17 es cíclico.

30. Probar que si p y q son primos distintos entonces un grupo de orden pq no es simple.

31. Sea G un grupo de orden $p^r m$, con $r \geq 1$ y $p > m$. Probar que G no es simple.

32. Sea G un grupo de orden $p^2 q$ con p y q primos. Probar que G no es simple.

33. Sea G un grupo, $|G| = pq$, $p > q$ primos tal que q no divide a $p-1$. Probar que G es cíclico.

34. Probar que si todos los subgrupos de Sylow de un grupo finito G son normales, entonces $G \cong \prod_{p \text{ primo}} S_p$ donde S_p el (único) p-subgrupo de Sylow de G. En particular, un grupo abeliano finito es producto de sus subgrupos de Sylow.