Álgebra II

Primer Cuatrimestre — 2019

Práctica 1: Grupos - Primera Parte

Definiciones y ejemplos

1. Probar que los siguientes conjuntos son grupos abelianos con el producto de números complejos. Determinar cuáles de ellos son cíclicos.

(*a*) $\mathbb{G}_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$;

(*b*) $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$;

(*c*) $\mathbb{G}_{p^\infty} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{G}_{p^n}$ donde p es un número primo.

2. Sean k un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$. Se definen:

$$\begin{aligned} \mathsf{GL}_n(k) &= \{A \in M_n(k) : \det A \neq 0\} \\ \mathsf{SL}_n(k) &= \{A \in M_n(k) : \det A = 1\} \end{aligned}$$

Probar que, dotados de la multiplicación usual de matrices, estos dos conjuntos resultan ser grupos. Describirlos para $n = 1$. ¿Cuándo son abelianos?

3. Probar que todos los grupos de 4 elementos son abelianos.

4. *Grupo opuesto.* Sea $(G, \star)$ un grupo. El *grupo opuesto* de G es el conjunto $G^{\text{op}} = G$ con la operación $\star_{\text{op}}$ definida por:

$$\star_{\text{op}} : (g, h) \in G^{\text{op}} \times G^{\text{op}} \mapsto h \star g \in G^{\text{op}}$$

Probar que $(G^{\text{op}}, \star_{\text{op}})$ es un grupo.

5. Probar que si G_1 y G_2 son grupos y $g_1 \in G_1, g_2 \in G_2$ son elementos de orden finito, entonces el orden de (g_1, g_2) en $G_1 \times G_2$ es el mínimo común múltiplo entre los órdenes de g_1 y g_2.

6. *Exponentes pequeños.* El *exponente* de un grupo G es el menor número natural e tal que para todo $g \in G$ se tiene $g^e = 1$ —si es que existe algún e con esta propiedad.

(*a*) Mostrar que los grupos de exponente 2 son abelianos.

(*b*) Considerar:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathsf{GL}_3(\mathbb{F}_3) : a, b, c \in \mathbb{F}_3 \right\}$$

Mostrar que G, con el producto usual de matrices, es un grupo no abeliano de exponente 3.

7. Sean G un grupo, X un conjunto y G^X el conjunto de todas las funciones $f : X \to G$. Dotamos a G^X del producto $\star$ dado por $(f \star g)(x) = f(x)g(x)$ para todo $x \in X$. Probar que $(G^X, \star)$ es un grupo. ¿Cuándo es abeliano?

8. *Producto directo.* Sean G y H grupos. El *producto directo* de G y H es el conjunto $G \times H$ con la operación dada por:

$$\big((g_1, h_1), (g_2, h_2)\big) \in (G \times H) \times (G \times H) \mapsto (g_1 g_2, h_1 h_2) \in G \times H$$

Probar que $G \times H$ es un grupo. Probar que $G \times H$ es abeliano sii G y H son abelianos.

Subgrupos

1. Sean G un grupo y $H \subseteq G$ un subconjunto. Mostrar que son equivalentes:

(i) H es un subgrupo de G.

(ii) H es no vacío y $\forall x, y \in H$, $xy^{-1} \in H$.

Mostrar que si G es finito, estas afirmaciones son equivalentes a:

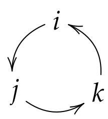
(iii) H es no vacío y $\forall x, y \in H$, $xy \in H$.

Dar un contraejemplo para esta última equivalencia cuando G es infinito.

2. Sea $\mathbb{H}$ el conjunto de 8 elementos $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ dotado del producto dado por las siguientes ecuaciones y la regla usual de los signos:

$$\begin{aligned} &i \cdot j = k, && j \cdot k = i, && k \cdot i = j, \\ &j \cdot i = -k, && k \cdot j = -i, && i \cdot k = -j, \\ &i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = -1. \end{aligned}$$

El par $(\mathbb{H}, \cdot)$ es un grupo no abeliano al que llamamos *grupo de cuaterniones*. El siguiente diagrama permite recordar la tabla de multiplicación de $\mathbb{H}$:



Hallar todos los subgrupos de $\mathbb{H}$.

3. Sean G un grupo y H_1 y H_2 subgrupos de G. Probar que:

(a) $H_1 \cap H_2$ es un subgrupo de G.

(b) $H_1 \cup H_2$ es un subgrupo de G sii $H_1 \subseteq H_2$ o $H_2 \subseteq H_1$.

4. Sea G un grupo.

(a) Sea $\mathcal{H}$ una familia de subgrupos de G. Mostrar que $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$ es un subgrupo de G.

(b) Sea ahora $X \subseteq G$ un subconjunto arbitrario. Mostrar que existe un menor subgrupo de G que contiene a X. Describirlo en términos de los elementos de X.

El subgrupo cuya existencia se afirma en la segunda parte de este ejercicio se denomina el *subgrupo de G generado por X* y se denota $\langle X \rangle$. Si $X = \{x_1, \ldots, x_r\}$, escribimos $\langle x_1, \ldots, x_r \rangle$ en lugar de $\langle \{x_1, \ldots, x_n\} \rangle$.

5. Probar que $\mathbb{Z} = \langle m, n \rangle$ sii m y n son coprimos.

6. Sea $G = \mathsf{GL}_2(\mathbb{Z})$ y sean $\alpha, \beta \in G$ dados por

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mostrar que $\alpha^4 = \beta^3 = \mathsf{id}$, pero que $\alpha\beta$ tiene orden infinito. Así, $\langle \alpha, \beta \rangle$ es infinito. Este ejemplo muestra que finitos elementos de orden finito pueden generar un subgrupo infinito.

7. (a) Sean G un grupo, $g \in G$ un elemento de orden finito y $n \in \mathbb{Z}$. Calcular $\mathsf{ord}(g^n)$.

(b) Mostrar que un grupo no trivial sin subgrupos propios es cíclico de orden primo.

8. Sea p un número primo, $m \in \mathbb{N}$ y sea G un grupo de orden p^m. Probar que existe un elemento de orden p en G.

9. Probar que si H es un subgrupo de $\mathbb{Z}$ entonces existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $H = n \cdot \mathbb{Z}$.

10. Sea $G \subset \mathbb{C}^\times$ un subgrupo finito del grupo multiplicativo $\mathbb{C}^\times$. Probar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $G = \mathbb{G}_n$ es el grupo de las raíces n-ésimas de la unidad.

Morfismos de grupos

1. Sea $f : G \longrightarrow G$ un morfismo de grupos. Probar que $ord(f(x))$ divide a $ord(x)$ si $ord(x)$ es finito.

2. Sea $f : G \longrightarrow L$ un epimorfismo. Decidir para cuáles P_i vale:
"G verifica $P_i \Rightarrow L$ verifica P_i"

(P_1) tener n elementos.
(P_2) ser finito.
(P_3) ser conmutativo.
(P_4) ser no conmutativo.
(P_5) ser cíclico.
(P_6) todo elemento tiene orden finito.
(P_7) todo elemento tiene orden infinito.

3. Sea $f : G \longrightarrow L$ un monomorfismo. Decidir para cuáles P_i del ejercicio anterior vale: "L verifica $P_i \Rightarrow G$ verifica P_i".

4. (a) Probar que $Aut(\mathbb{Z}) \simeq G_2$.
(b) Hallar $Hom(G_n, \mathbb{Z})$.
(c) Hallar $Hom(G, \mathbb{Z})$ para G un grupo de orden finito.

5.
1. Probar que son equivalentes:
   (a) G es abeliano.
   (b) La aplicación $f : G \longrightarrow G$ definida por $f(x) = x^{-1}$ es un morfismo de grupos.
   (c) La aplicación $f : G \longrightarrow G$ definida por $f(x) = x^2$ es un morfismo de grupos.
2. Probar que si $x^2 = 1$ para todo $x \in G$ entonces G es abeliano.

6. Probar que
1. $Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n) \neq 0$.
2. $Hom(\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7) = 0$.
3. $Hom(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = 0$.
4. No existe un epimorfismo de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

7. Hallar dos grupos G y K no isomorfos tales que $Aut(G) \simeq Aut(K)$.

Subgrupos normales

1. Sean G un grupo, $X \subseteq G$ un subconjunto tal que $G = \langle X \rangle$ y N un subgrupo de G. Mostrar que N es normal en G sii $xNx^{-1} = N$ para todo $x \in X$. Mostrar que si G es finito entonces alcanza con pedir $xNx^{-1} \subseteq N$ para todo $x \in X$.

2. Sea G un grupo.

(a) Sea $\mathcal{H}$ una familia de subgrupos normales de G. Mostrar que $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$ es un subgrupo normal de G.

(b) Sea $X \subseteq G$ un subconjunto arbitrario. Mostrar que existe un menor subgrupo normal de G que contiene a X. Describirlo en términos de los elementos de X.

El subgrupo cuya existencia se afirma en la segunda parte de este ejercicio se denomina el *subgrupo normal de G generado por X*. En general, este subgrupo no coincide con el subgrupo generado por X, construído en **4**.

(c) Supongamos que $X \subseteq G$ es un conjunto tal que, cualquiera sea $g \in G$, es $gXg^{-1} \subseteq X$. Mostrar que entonces el subgrupo normal generado por X coincide con el subgrupo generado por X.

3. (a) Sea G un grupo y sea $N \subseteq G$ un subgrupo tal que $gNg^{-1} \subseteq N$ para todo $g \in G$. Mostrar que N es normal.

(b) Sean $G = \mathsf{GL}_2(\mathbb{Q})$ y $H = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : n \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq G$. Verificar que H es un subgrupo de G. Sea ahora $g = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G$. Mostrar que $gHg^{-1} \subsetneq H$.

4. Si G es un grupo y $A, B \subseteq G$ son subconjuntos, definimos $AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$. Supongamos que A y B son subgrupos de G. Probar que:

(*a*) AB es un subgrupo de G sii $AB = BA$.
(*b*) $G = AB$ sii $G = \langle A, B\rangle$ y $AB = BA$.
(*c*) Si $AB = BA$ y $C \subseteq G$ es un subgrupo tal que $A \subseteq C$, entonces $AB \cap C = A(B \cap C)$.
(*d*) Si $G = AB$ y $C \subseteq G$ es un subgrupo tal que $A \subseteq C$, entonces $C = A(B \cap C)$.
(*e*) Si alguno de A o B es normal en G entonces AB es un subgrupo de G.
(*f*) Si los dos son normales, entonces AB es un subgrupo normal de G.

5. Sea G un grupo. Si $a, b \in G$, escribimos $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$; $[a, b]$ es el *conmutador de a y b*. Es fácil ver que $[a, b] = 1$ sii a y b conmutan, así que en cierta forma $[a, b]$ mide la no-conmutatividad de a y b.

(*a*) Sea $X = \{[a, b] : a, b \in G\}$ y sea $G' = \langle X\rangle$ el subgrupo generado por X en G. Mostrar que G' es normal en G. Llamamos a G' el *subgrupo derivado de G* y lo denotamos por $[G, G]$.
(*b*) Probar que G es abeliano sii $[G, G] = 1$.
(*c*) Calcular $[G, G]$ cuando G es $\mathbb{H}$ o un grupo diedral D_n.

6. (*a*) Sea G un grupo y sea $\mathsf{Z}(G) = \{g \in G : gh = hg \text{ para todo } h \in G\}$. Mostrar que $\mathsf{Z}(G)$ es un subgrupo normal de G. Llamamos a $\mathsf{Z}(G)$ el *centro de G* y decimos que los elementos de $\mathsf{Z}(G)$ son *centrales* en G.
(*b*) Sean G un grupo y $X \subseteq G$ un subconjunto tal que $G = \langle X\rangle$. Mostrar que:

$$\mathsf{Z}(G) = \{g \in G : gx = xg \text{ para todo } x \in X\}$$

(*c*) Encontrar el centro de un grupo abeliano, de D_n para $n \geq 1$, de $\mathbb{H}$, y de $\mathsf{GL}_n(k)$ para k un cuerpo y $n \geq 1$.
(*d*) Sean G un grupo y X un conjunto. Calcular el centro de G^X.

7. Encontrar todos los subgrupos de D_4 y determinar cuáles de ellos son normales en D_4.

8. Probar que todo subgrupo de $\mathbb{H}$ es normal. Concluir que $\mathbb{H} \ncong D_4$. Un grupo no abeliano con todos sus subgrupos normales se dice *Hamiltoniano*. El siguiente teorema de Reinhold Baer (1902–1979) describe completamente esta clase de grupos:

> **Teorema.** (R. Baer, Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe, S. B. Heidelberg. Akad. Wiss. 2 (1933), 12-17) *Un grupo finito es hamiltoniano sii es isomorfo a $\mathbb{H} \times A$ para algún grupo abeliano A que no tiene elementos de orden 4.*

9. Sea G un grupo.

(*a*) Sea $g \in G$. El *centralizador de g en G* es el subconjunto $\mathsf{C}(g) = \{h \in G : gh = hg\}$. Mostrar que se trata de un subgrupo de G y que es, en efecto, el subgrupo más grande de G que contiene a g y en el que g es central.
(*b*) Sea $N \subseteq G$ un subconjunto. El *centralizador de N en G* es el subconjunto $\mathsf{C}(N) = \{h \in G : nh = hn \text{ para cada } n \in N\}$. Mostrar que se trata de un subgrupo de G.
(*c*) Mostrar que si $N \subseteq G$ es un subconjunto, entonces $\mathsf{C}(\langle N\rangle) = \mathsf{C}(N)$.
(*d*) Sea $H \subseteq G$ un subgrupo de G. El *normalizador de H en G* es el subconjunto $\mathsf{N}(H) = \{g \in G : gH = Hg\}$. Mostrar que se trata de un subgrupo de G. Mostrar, más aún, que H es un subgrupo normal de $\mathsf{N}(H)$, y que $\mathsf{N}(H)$ es el subgrupo más grande de G que contiene a H como subgrupo normal.
(*e*) Si $N \subseteq G$ es un subconjunto normal (es decir, si para cada $g \in G$, $gNg^{-1} = N$), entonces $\mathsf{Z}(N)$ es un subgrupo normal de G.