Álgebra I
Práctica 2 - Números Naturales e Inducción

Sumatoria

1. i) Reescribir cada una de las siguientes sumas usando el símbolo de sumatoria

(a) $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100$

(b) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 1024$

(c) $1 + (-4) + 9 + (-16) + 25 + \cdots + (-144)$

(d) $1 + 9 + 25 + 49 + \cdots + 441$

(e) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1)$

(f) $n + 2n + 3n + \cdots + n^2$

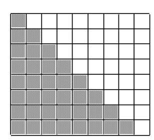
ii) Reescribir cada una de los siguientes productos usando el símbolo de productoria y/o de factorial

(a) $5 \cdot 6 \cdots 99 \cdot 100$ (b) $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdots 1024$ (c) $n \cdot 2n \cdot 3n \cdots n^2$

2. Escribir los dos primeros y los dos últimos términos de las expresiones siguientes

i) $\displaystyle\sum_{i=6}^{n} 2(i-5)$ ii) $\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} \frac{1}{i(i+1)}$ iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i}$ iv) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n^2} \frac{n}{i}$ v) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-3}$

3. i) Probar que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ contando de dos maneras la cantidad de cuadraditos sombreados del diagrama



ii) Deducir que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$.

4. Calcular

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (4i+1)$ ii) $\displaystyle\sum_{i=6}^{n} 2(i-5)$

5. Calcular

i) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} 2^i$

ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} q^i$, $q \in \mathbb{R}$

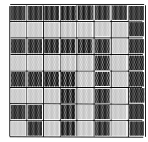
iii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} q^{2i}$, $q \in \mathbb{R}$

iv) $\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} q^i$, $q \in \mathbb{R}$

Inducción

6. Probar que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$:

i) contando de dos maneras la cantidad total de cuadraditos del diagrama



ii) usando el ejercicio 3

iii) usando el principio de inducción.

7. *(Suma de cuadrados y de cubos)* Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

8. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\, i^2 = \frac{(-1)^{n+1}n(n+1)}{2}$

ii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{-1}{4i^2-1} = \frac{n+1}{2n+1}$

iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i+1)\, 3^{i-1} = n\, 3^n$

iv) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i\, 2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^{n+1}}{n+2} - 1$

v) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-3} = 2^n(1-2n)$

9. Sea $a, b \in \mathbb{R}$. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $a^n - b^n = (a-b)\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a^{i-1}b^{n-i}$. Deducir la fórmula de la serie geométrica: para todo $a \neq 1$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$.

10. i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Probar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1}-a_i) = a_{n+1}-a_1$.

ii) Calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$ (Sugerencia: $\displaystyle\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$).

iii) Calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$ (Sugerencia: calcular $\displaystyle\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1}$).

11. Calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i i}{(2i-1)(2i+1)}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

12. Probar que las siguientes desigualdades son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$

i) $n < 2^n$

ii) $3^n + 5^n \geq 2^{n+2}$

iii) $3^n \geq n^3$

iv) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{n+i}{i+1} \leq 1 + n(n-1)$

v) $\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} \frac{i}{2^i} \leq n$

vi) $\displaystyle\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2i-1} > \frac{n+3}{4}$

vii) $n! \geq \dfrac{3^{n-1}}{2}$

viii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \leq 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

13. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \geq -1$. Probar que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1 + na$.
¿En qué paso de la demostración se usa que $a \geq -1$?

14. Probar que

i) $n! \geq 3^{n-1},\ \forall\, n \geq 5$

ii) $3^n - 2^n > n^3,\ \forall\, n \geq 4$

iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{3^i}{i!} < 6n - 5,\ \forall\, n \geq 3$

15. Probar que para todo $n \geq 3$ vale que

i) la cantidad de diagonales de un polígono de n lados es $\dfrac{n(n-3)}{2}$

ii) la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $\pi\,(n-2)$

Recurrencia

16. i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 5 \qquad \text{y} \qquad a_{n+1} = 3a_n - 2^n,\quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Probar que $a_n = 2^n + 3^n$.

ii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 2 \qquad \text{y} \qquad a_{n+1} = 2\,n\,a_n + 2^{n+1}n!,\quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Probar que $a_n = 2^n\, n!$.

iii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 0 \qquad \text{y} \qquad a_{n+1} = a_n + n(3n+1),\quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Probar que $a_n = n^2(n-1)$.

17. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez.

i) $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = (1+\sqrt{a_n})^2,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

ii) $a_1 = 3$ y $a_{n+1} = 2a_n + 3^n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

iii) $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = n\,a_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

iv) $a_1 = 2$ y $a_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{a_n},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

18. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez.

i) $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = a_n + n^3,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

ii) $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = a_n + (-1)^{n+1}n^2,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

iii) $a_1 = 3$ y $a_{n+1} = a_n + (2n+1)3^{n-1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

(Sugerencia: usar los Ejercicios 10(i), 7 y 8.)

19. i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = a_n + n\cdot n!,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Probar que $a_n = n!$, y, aplicando el Ej. 10(i), calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i\cdot i!$.

ii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = a_n + 3n^2 + 3n + 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Probar que $a_n = n^3$, y, aplicando el Ej. 10(i), calcular de otra manera $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2$ (c.f. Ej. 7).

20. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez.

i) $a_1 = 1, \quad a_2 = 2 \quad \text{y} \quad a_{n+2} = n\, a_{n+1} + 2(n+1)a_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$

ii) $a_1 = 1, \quad a_2 = 4 \quad \text{y} \quad a_{n+2} = 4\sqrt{a_{n+1}} + a_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$

iii) $a_1 = 1, \quad a_2 = 3 \quad \text{y} \quad 2a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 3n + 5, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$

iv) $a_1 = -3, \quad a_2 = 6 \quad \text{y} \quad a_{n+2} = \begin{cases} -a_{n+1} - 3 & \text{si } n \text{ es impar} \\ a_{n+1} + 2a_n + 9 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$

21. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez.

i) $a_0 = 2, \quad a_1 = 4 \quad \text{y} \quad a_{n+2} = 4\,a_{n+1} - 3\,a_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$

ii) $a_0 = 1, \quad a_1 = 4 \quad \text{y} \quad a_{n+2} = 4\,a_{n+1} - 3\,a_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$

iii) $a_0 = 1, \quad a_1 = 4 \quad \text{y} \quad a_{n+2} = 4\,a_{n+1} - 4\,a_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$

22. i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3 \quad \text{y} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 5a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n < 1 + 3^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{2n+1}{n+2}\, a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n > n + \dfrac{1}{3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

23. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez.

i) $a_1 = 1 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = 1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i\, a_i, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$

ii) $a_1 = \dfrac{1}{2} \quad \text{y} \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\Big(1 - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\Big), \ \forall\, n \in \mathbb{N}$

iii) $a_1 = 1 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \ + (n+1), \ \forall\, n \in \mathbb{N}$

24. Probar que todo número natural n se escribe como suma de distintas potencias de 2, incluyendo $2^0 = 1$ (sugerencia: considerar la mayor potencia de 2 menor o igual a n).