21/06

Polinomio derivado

$$f = \sum_{j=0}^{m} a_j X^j ; \quad a_j \in K$$

$$f' = \sum_{j=1}^{m} j \cdot a_j X^{j-1} \rightsquigarrow \text{Donde } j \cdot a_j = \underbrace{a_j + a_j + \dots + a_j}_{j\text{-veces}}$$

En general, si K es un cuerpo $\alpha \in K$. $n \in \mathbb{N}$

$$n \cdot \alpha \underset{\text{definición}}{=} \underbrace{\alpha + \alpha + \dots + \alpha}_{n\text{-veces}}$$

El caso $n \in \mathbb{Z}$ se define así: $0\alpha = 0$

Si $n < 0$ entonces $n \cdot \alpha = -(-n \cdot \alpha)$

Def Característica ~~del~~ de un cuerpo.

El menor $n \in \mathbb{N}$ tq $n \cdot 1 = 0$ es la característica de K.

Si tal n no existe se dice que la característica es del cuerpo es (cero) 0.

Notación $Char(K)$

Ej $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ tienen característica 0 (cero)

Ej $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tienen característica p

p primo.

Teorema: Sea $\mathbb{K}$ cuerpo entonces o bien $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$ o bien $\mathrm{char}(\mathbb{K})$ es un número primo.

Dem: Sea $n = \mathrm{Char}(\mathbb{K})$ $n \neq 0$, o sea $n.1 = 0$, además n es el menor natural que le ocurre esto. Veamos que n es primo.

Supongamos que no: $n = m.q$ $m, q \in \mathbb{Z}$ $m, q \neq 1$ Obs: $m < n$, $q < n$

$$0 = n.1 = (m.q).1 = \boxed{m.\overset{0}{\overset{\shortparallel}{(q.1)}}} \circledast$$

Si $q.1 \neq 0$ entonces por ser $\mathbb{K}$ un cuerpo $\exists\, b \in \mathbb{K}$ tq $(q.1)b = 1$ entonces multiplicamos $\circledast$ por b queda

$$b.0 = m(q.1).b$$
$$0 = m((q.1).b)$$
$$0 = m.1$$

Absurdo porque $m < n$ y n es el menor natural tq $n.1 = 0$.

{Volvamos al polinomio derivado}

Vimos propiedad 4) de la clase pasada que si $\mathrm{gr}\, f = n^{\underline{\circ}}$ entonces $f' = 0$ o $\mathrm{gr}(f') < n$. Además, si $\mathrm{Char}(\mathbb{K}) = 0$ entonces $\mathrm{gr}(f') = \mathrm{gr}(f) - 1$ (Esto es porque si $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0 \Rightarrow n.a_n \neq 0$)

Teorema. $f \in \mathbb{K}[X]$, $x \in \mathbb{K}$ es raíz multiple de f sii $f(x) = 0$ y $f'(x) = 0$.

Dem: $f = (\overset{\text{variable}}{X} - \overset{\text{raíz}}{x})^k g$, $g(x) \neq 0$. (porque mult $(x, f) = k$)

$$f' = k(X - x)^{k-1}.g + (X - x)^k g' = (X - x)^{k-1}(kg + (X - x)g')$$

En particular $(X - x)^{k-1} \mid f' \Rightarrow$ mult $(x, f) \geq k-1$

para concluir que mult $(x, f') = k-1$ resta ver que el polinomio $kg + (X - x)g'$ no tiene raíz en x

Dem: Si x es raíz multiple de f entonces mult $(x, f) \geq 2$

$\Rightarrow f(X - x)^k.g$ con $k \geq 2$

$$f' = k(X - x)^{k-1}.g + (X - x)^k g' \Rightarrow f' = (X - x)^{k-1}(kg + (X - x)g') \text{ como } k \geq 2$$

$f'(x) = 0 \longrightarrow$ porque $(x - x)^{k-1} = 0$.

Para la vuelta, si x no es raíz múltiple de f, supongamos que es raíz simple

Entonces $f = (\bar{X} - x)\, g$ con $g(x) \neq 0$

$\Rightarrow f' = g + (\bar{X} - x)\, g' \Rightarrow f'(x) = g(x) \neq 0.$

Teorema: Si $K = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$ o un cuerpo de Char 0 y $f(x) = 0$

Entonces $\text{mult}(x, f) = k \geq 1$ sii $f(x) = 0$ y $\text{mult}(x, f') = k-1$

Dem $f = (\bar{X} - x)^k \cdot g$ con $g(x) \neq 0 \Rightarrow f' = (\bar{X} - x)^{k-1} \cdot (k g + (\bar{X} - x) g')$

$\Rightarrow \text{mult}(x, f') \geq k-1$. Para concluir, resta ver que x no es raíz de $k \cdot g + (\bar{X} - x) g'$

Evaluo x en $k g + (\bar{X} - x) g'$ y queda $k g(x) + (x - x) g'(x) = k\, g(x) \neq 0$ $= k\, g(x)$.

Como $g(x) = 0$ y Char $K = 0$ $\;k \cdot g(x) \neq 0$.

Demostrar la vuelta (Ejercicio)

Recordar $\bar{X}^p$ en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Las raíces son $x = 0$ con multiplicidad p.

$f' = 0 \Rightarrow$ todo elemento de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ es raíz de f' pero sólo el cero es raíz de f.

otro ejemplo $f = \bar{X}^n - 1$ en $\mathbb{R}$

$f' = n \bar{X}^{n-1}$ tiene raíz en $x = 0$ de multiplicidad $n-1$ pero $f(0) \neq 0$.

Corolario Si $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ o cuerpo de Char 0 entonces $\text{mult}(x, f) = k$

Sii: $\begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \\ \vdots \\ f^{(k-1)}(x) = 0 \end{cases}$ (las primeras $k-1$ derivadas se anulan en x) Pero $f^{(k)}(x) \neq 0$.

Dem Por el teorema anterior $\text{mult}(x, f) = k \Leftrightarrow f(x) = 0$ y $\text{mult}(x, f') = k-1$

$\Leftrightarrow f(x) = 0, f'(x) = 0 \wedge \text{mult}(x, f'') = k-2 \Leftrightarrow f(x) = 0, f'(x) = 0, f''(x) = 0, \text{mult}(x, f''') = k-3$

$\Leftrightarrow \ldots$ llegamos a $\Leftrightarrow f(x)=0, f'(x)=0, f''(x)=0, \ldots, f^{(k-1)}(x)=0, \underbrace{mult(x, f^{(k)})=0}_{\Updownarrow \; f^{(k)}(x) \neq 0}$.

Propo $f \in \mathbb{K}[X]$ $x_1, x_2 \in \mathbb{K}$ tales que $x_1 \neq x_2$, $mult(x_1, f) = k_1$
$mult(x_2, f) = k_2$.
Entonces $(X - x_1)^{k_1} \cdot (X - x)^{k_2} \mid f$

Dem: $(X - x_1)^{k_1} \mid f$ y $(X - x_2)^{k_2} \mid f$

Si vemos que $(X - x_1)^{k_1}$ y $(X - x_2)^{k_2}$ son coprimos, entonces $(X - x_1)^{k_1} \cdot (X - x_2)^{k_2} \mid f$

Veamos pues, que son coprimos $Div_{mon}((X - x_1)^{k_1}) = \{ (X - x_1)^{\ell}, \; 0 \leq \ell \leq k_1 \}$
porque $(X - x_1)$ es irreducible.

y además usamos TF Aritmética (versión polinomios).
$Div_{mon}((X - x_2)^{k_2}) = \{ (X - x_2)^{s} \quad 0 \leq s \leq k_2 \}$

Como $x_1 \neq x_2$ $Div_{mon}(X - x_1) \cap Div_{mon}(X - x_2) = \{1\}$

Corolario: $f \in \mathbb{K}[X]$ $gr\, f = n \Rightarrow f$ no puede tener más de n raíces en $\mathbb{K}$

Dem: Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ raíces distintas con multiplicidades $k_1, k_2, \ldots, k_n$
Entonces $\prod_{i=1}^{\ell} (X - x_i)^{k_i} \mid f$

Tomando grados, queda que $\underbrace{gr\left(\prod_{i=1}^{\ell} (X - x_i)^{k_i} \right)}_{\sum_{i=1}^{\ell} k_i} \leq gr\, f \leq n$

Cantidad de raíces contadas con multiplicidad

Una técnica para hayar raíces de $f \in \mathbb{Q}[x]$

Obs Si $f \in \mathbb{Q}[X]$ $\exists c \in \mathbb{Q}$ tq $f = c \tilde{f}$ con $\tilde{f} \in \mathbb{Z}[x]$ (limpiar denominadores)

Ej $f = \frac{X^3}{5} + \frac{X^2}{4} + \frac{X}{2} + 1$

$f = \frac{4X^3 + 5X^2 + 10X + 20}{20} \rightarrow f = \frac{1}{20} \cdot \tilde{f}$ con $\tilde{f} = 4X^3 + 5X^2 + 10X + 20$

Las raíces de $f \in \mathbb{Q}[x]$ son las mismas que las raíces de $\tilde{f} \in \mathbb{Z}[x]$

Lema (de Gauss). Sea $f \in \mathbb{Z}[x]$ y $p/q \in \mathbb{Q}$ (racional) $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$
$(p : q) = 1$. $(p/q = \alpha)$

Si α es raíz de f entonces $q \mid a_n$ y $p \mid a_0$

Dem: $f = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j$ $\quad 0 = f(\alpha) = f\left(\frac{p}{q}\right) = \sum_{j=0}^{n} a_j \left(\frac{p}{q}\right)^j = \sum_{j=0}^{n} a_j \frac{p^j}{q^j}$

sacando denominador común

$$= \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot \frac{p^j}{q^n} \cdot q^{n-j} = \frac{1}{q^n} \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot p^j \cdot q^{n-j}.$$

Entonces $\sum_{j=0}^{n} a_j p^j \cdot q^{n-j} = 0$, empezando la sumatoria en $j=1$

Entonces $\sum_{j=1}^{n} a_j p^j q^{n-j} + a_0 q^n = 0$, despejando

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_j p^j q^{n-j}}_{\text{divisible por } p} = -a_0 \cdot q^n$$

$$\Rightarrow p \mid a_0 q^n \underset{(p:q)=1}{\Longrightarrow} p \mid a_0$$

Analogamente $\underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} a_j \cdot p^j q^{n-j}}_{\text{es divisible por } q} = -a_n \cdot p^n$

$$\Rightarrow q \mid a_n p^n \underset{(p:q)=1}{\Longrightarrow} q \mid a_n$$