7/6.

NÚMEROS COMPLEJOS

$z = a + ib$ (FORMA CARTESIANA) BUENA PARA LA SUMA.

$$\left.\begin{aligned} z &= r.(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \\ &= r.e^{i\theta} \end{aligned}\right\} \text{(FORMA POLAR)}$$

BUENA PARA MULTIPLICAR.

$r = \|z\|$

$\theta \in [0, 2\pi]$

HOJA N°

FECHA

OBS $|z| = r = \sqrt{a^2+b^2}$
$= \sqrt{z.\bar{z}}$

PROPIEDADES:

Si $z = r.e^{i\theta}$ ENTONCES

1) $\bar{z} = r.e^{-i\theta}$

2) $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{r.e^{-i\theta}}{r^2} = r^{-1}.e^{-i\theta}$

DEMOSTRACIÓN

1) $\bar{z} = r.(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta)$
$= r.(\cos(-\theta) + i\,\text{sen}(-\theta))$
$= r.e^{-i\theta}$

FÓRMULA DE "DE MOIVRE"

Si $z = r.e^{i\theta}$ $w = \alpha.e^{i\varphi}$

$z.w = r.\alpha.e^{i(\theta+\varphi)}$

* APLICACIONES FÁCILES.

Si z ES $r.e^{i\theta}$ ENTOCES 1) $z^m = e^m.e^{im\theta}$

2) Si $w = \alpha.e^{i\varphi}$

$\dfrac{z}{w} = \dfrac{r}{\alpha}.e^{i(\theta-\varphi)}$

Ejemplo. $e^{i\,127\pi/4}$

$127\pi/4 > 2\pi$

PARA GRAFICARLO EL ÁNGULO DEBE ESTAR ENTRE 0 y 2π

$\left(\dfrac{120}{4} + \dfrac{7}{4}\right)\pi = 30\pi + \dfrac{7}{4}\pi$

$= 15(2\pi) + \dfrac{7}{4}\pi \rightarrow e^{i\,127\pi/4} = e^{i\,7/4\,\pi}$

EN VERDAD LO Q HICIMOS FUE CALCULAR $\theta \equiv \theta_0 \ (2\pi)$

CON $0 \leq \theta_0 < 2\pi$.

O SEA $\theta = K.2\pi + \theta_0 \quad K \in \mathbb{Z}$.

UNA VEZ MÁS, SI $\theta = \frac{127}{4}\pi$

ENTONCES. $\theta = \frac{127}{4.2}(2\pi) \qquad 127 = 15.8 + 7$

$\Rightarrow \theta = \frac{15.8 + 7}{8}.(2\pi) = (2\pi)15 + 7/_8\,(2\pi)$

$\Rightarrow \theta_0 = 7/_4\,\pi$.

RAICES DE LA UNIDAD

OBJETIVO: DADO $z \in \mathbb{C}$ RESOLVER LA EC. $X^m = z$.

Ejemplos. $X^2 = 1$ LAS SOL. SON $\{1, -1\}$

$X^4 = 1$ LAS SOL. SON $\{1, -1, i, -i\}$

$X^3 = 1$. LAS SOL. SON $\{1, -1/2 + i\sqrt{3}/2, -1/2 - i\sqrt{3}/2\}$

$$X^3 - 1 = (X-1)\underbrace{(X^2 + X + 1)}_{\text{HALLAMOS LAS RAICES}}$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \begin{cases} \dfrac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = -1/2 + i\sqrt{3}/2 \\ \dfrac{-1 - \sqrt{-3}}{2} = -1/2 - i\sqrt{3}/2 \end{cases}$$

TEOREMA. $z = r.e^{i\theta}$ CON $r \in \mathbb{R}_{>0}$ $0 \leq \theta < 2\pi$, LA ECUACIÓN $X^m = z$ TIENE EXACTAMENTE m RAICES DISTINTAS $\{w_0, w_1 \dots w_{m-1}\}$ DONDE $w_k = \sqrt[m]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{m}\right)}$

OBS: EL CASO $X^m = 0$ NO ESTÁ CONTEMPLADO EN EL TEOREMA (PORQUE $r = 0$). LA ÚNICA SOLUCIÓN ES $w = 0$

1) LAS w_k SON RAICES.

2) SON DISTINTAS.

3) SON TODAS. (NO HAY OTRAS)

1) $$w_k^{\,m} = \left(\sqrt[m]{r} \cdot e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{m}\right)}\right)^m = \left(r^{1/m}\right)^m e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{m}\right) \cdot m}$$

$$= r \cdot e^{i\theta + 2k\pi}$$

$$= r \cdot e^{i\theta} = z$$

2) VEAMOS QUE SON DISTINTAS.

SEA $j < k < m$ $\quad 0 \leq j$ $\quad$ VEAMOS QUE $w_j \neq w_k$.

SI $w_j = w_k$

$$\cancel{r^{1/m}} \cdot e^{i\left(\frac{\theta + 2j\pi}{m}\right)} = \cancel{r^{1/m}} \cdot e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{m}\right)}$$

$$\Rightarrow e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{m}\right) - i\left(\frac{\theta + 2j\pi}{m}\right)} = 1$$

$$1 = e^{i\, 2\pi/m\, (k - j)}$$

$\Rightarrow 2\pi \left(\frac{k - j}{m}\right)$ ES MÚLTIPLO ENTERO DE 2π. $\leftarrow$ ESTO ES xq $e^{\alpha} = 1$ sii $\alpha = 0, 2\pi, \ldots$ $\alpha = 2\pi \cdot \ell$ $\quad \ell \in$

ENTONCES $\frac{k - j}{m} \in \mathbb{Z}$, PERO ESTO NO OCURRE xq

$0 < k - j < m$.

<u>CONCLUSIÓN</u> $\quad w_j \neq w_k$ //

ADEMÁS, SI $w_k = r^{1/2} \cdot e^{i\left(\frac{\theta + k\, 2\pi}{m}\right)}$ CON $0 < \theta < 2\pi$

ENTONCES EL ÁNGULO $\frac{\theta + 2k\pi}{m}$ VERIFICA QUE

$$0 < \frac{\theta + k \cdot 2\pi}{m} < 2\pi.$$

PARA 3) EN EL TEMA SIGUIENTE VEREMOS Q UN POLINOMIO DE GRADO m, TIENE A LO SUMO m RAICES.

Ejemplo. RESOLVER LA EC.

$$X^2 = 1 + i$$

$z = 1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$.

LAS RAICES SON $w = r e^{i\varphi}$

CON $r = \sqrt[2]{\sqrt{2}}$ $\qquad \varphi = \dfrac{\pi/4 + 2k\pi}{2}$ $\qquad$ CON $k = 0$ o $k = 1$

$\varphi_1 = \pi/8 \qquad \varphi_2 = \pi/8 + \pi = 9\pi/8$

RAICES DE LA UNIDAD

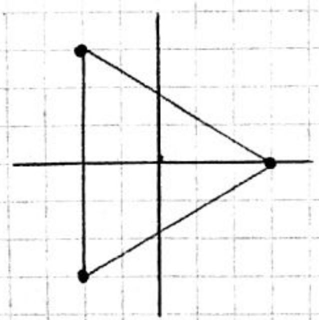
$$G_m = \{w \in \mathbb{C} : w^m = 1\}$$
$$= \{w_0, w_1, \dots, w_{m-1}\}$$

CON $w_k = e^{i\, 2\pi/k}$ (EN ESTE CASO $z = 1 \Rightarrow r = 1,\ \theta = 0$)

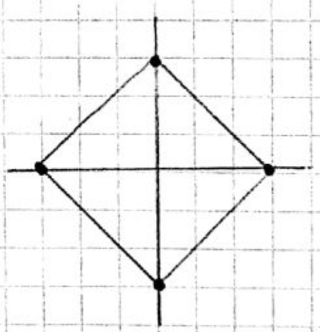
$0 \leq k < m$

DIBUJADOS

$m = 3$



$m = 4$



$m = 5$ UN PENTÁGONO [redacted] REGULAR.

PROPIEDADES

1) $z, w \in G_m \Rightarrow z.w \in G_m$

2) $z \in G_m$ $\bar{z} = z^{-1} \in G_m$ (xq $\bar{z}^m = \overline{z^m} = \bar{1} = 1$

3) $z \in G_m \Rightarrow |z| = 1$

4) si $z \in G_m$ $z^{-1} = z^{m-1}$

5) si $m | M \wedge z \in G_m \Rightarrow z \in G_M$ (o sea $G_m \subseteq G_M$)

xq $z^n = 1$, COMO $n | m \Rightarrow m = n.q$

$$z^m = z^{n.q} = 1$$

6) SI $m \equiv m' (n)$ $\wedge$ $w \in G_n$ ENTONCES $w^m = w^{m'}$

(xq $n | m - m' \Rightarrow m - m' = q.n$

$$\Rightarrow w^{m-m'} = w^{q.n} = (w^n)^q = 1^q = 1$$

DESPEJANDO QUEDA $w^m = w^{m'}$.

7) EN PARTICULAR, SI $w \in G_n$ y $m \in \mathbb{Z}$

$$w^m = w^{r_n(m)}$$

8) $G_n \cap G_m = G_{(n:m)}$

(OBS: SI $(n:m) = 1$. $G_n \cap G_m = \{1\}$)

<u>DEMOSTRACIÓN DE 8</u>: COMO $(n:m) | n$

POR 5) $G_{(n:m)} \subset G_n$,

COMO $(n:m) | m$, POR 5) $G_{(n:m)} \subset G_m$

COMBINANDO A AMBOS QUEDA

$G_{(n:m)} \subseteq G_n \cap G_m$

PARA VER LA OTRA INCLUSIÓN TOMEMOS $x \in G_n \cap G_m$

$\Rightarrow x^n = 1$ y $x^m = 1$

ENTONCES $x^{nk + ml} = 1$ $\forall k, l \in \mathbb{Z}$

COMO EL m.c.d ES COMBINACIÓN LINEAL DE m y n

$\Rightarrow x^{(n:m)} = 1 \Rightarrow x \in G_{(n:m)}$

9) (COROLARIO DE 8) y 5))

$G_n \subset G_m \overset{5)}{\Leftrightarrow} n | m$

(PORQUE SI $G_n \subset G_m \Rightarrow G_n \cap G_m = G_n$

$\overset{(8)}{\Rightarrow} (m:n) = n \Rightarrow n | m$

<u>TEOREMA</u>: $(G_n, \cdot)$ ES UN GRUPO ABELIANO, CÍCLICO DE ORDEN n.

PRODUCTO DE $\mathbb{C}$

Scanned by CamScanner

DEMOSTRACIÓN POR 1) . $(G_m, G_m) \to G_m$

$(w, z) \to w.z$

ESTÁ BIEN DEFINIDO.

$1 \in G_m$

POR 2) SI $z \in G_m \Rightarrow z^{-1} \in G_m$

(•) ES ASOCIATIVO Y CONMUTATIVO XQ EL PRODUCTO DE NÚMEROS COMPLEJOS LO ES.

- QUE TENGA ORDEN m, QUIERE DECIR Q TIENE m ELEM.
- QUE SEA CÍCLICO QUIERE DECIR QUE $\exists$ $w \in G_m$ tq. $\forall z \in G_m, \exists m \in \mathbb{Z}$ tq $w^m = z$.

TAL w SE LLAMA GENERADOR DEL GRUPO

EN G_m, UN GENERADOR ES

$w_1 = e^{\frac{i2\pi}{m}}$ XQ $w_k = (w_1)^k$

PARTE PRÁCTICA