28/6

RECORDAR:

1) EN $\mathbb{C}[x]$, LOS ÚNICOS IRREDUCIBLES SON DE GRADO 1 (POR EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA).

2) EN $\mathbb{R}[x]$ LOS ÚNICOS IRREDUCIBLES SON:

a- LOS DE GRADO 1.

b- LOS DE GRADO 2 CON $b^2-4ac<0$.

PARA 2) LOS HECHOS CLAVES SON:

i) PENSAR A $f \in \mathbb{R}[X]$ COMO $f \in \mathbb{C}[x]$ Y USAR 1.

ii) SI $f \in \mathbb{R}[x]$ y $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ ES RAIZ DE $f \underset{\substack{\uparrow \\ f(\bar z)=0}}{\Rightarrow} \underbrace{(X-z)(X-\bar z)}_{\in \mathbb{R}} \mid f$.

ATENCIÓN: SI $f \in \mathbb{C}[x]$ y $z \in \mathbb{C}$ ES RAIZ DE f, PUEDE SER FALSO QUE $f(\bar z)=0$.

Ej $f = X - i \in \mathbb{C}[x]$

$z=i$ ES RAIZ DE f PERO $\bar z=-i$ NO LO ES.

PARA VER QUE SI $f \in \mathbb{R}[x]$ y z ES RAIZ $\Rightarrow \bar z$ ES RAIZ, USAMOS QUE $\bar f = f$

(SI $f = \sum_{j=0}^{m} a_j X^j$, $\bar f = \sum_{j=0}^{m} \bar a_j X^j$

LEMA. SI $f \in \mathbb{R}[x]$, gr f IMPAR ENTONCES $\exists\, x \in \mathbb{R}$ TAL QUE $f(x)=0$

DEM. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ O VICEVERSA.

NOTA

POR TEO. BOLZANO $\exists\, x_0 \in (-\infty, +\infty)$ $f(x_0) = 0$.

OBS: ESTE LEMA SE USA EN LA DEM. DEL T.F. ÁLGEBRA

FACTORIZACIÓN EN $\mathbb{Q}[x]$

(FUERA DEL PROGRAMA)

1) VALE EN $\mathbb{Q}[x]$ HAY POLINOMIOS IRREDUCIBLES DE TODOS LOS GRADOS.

2) FACTORIZAR EN $\mathbb{Q}[x]$ ES LO "MISMO" QUE FACTORIZAR EN $\mathbb{Z}[x]$.

$\cdot\, f \in \mathbb{Q}[x]$. $\exists\, c \in \mathbb{Z}$. $c \cdot f \in \mathbb{Z}[x]$

SI $f = \sum_{j=0}^{m} \frac{a_j}{b_j} X^j$ $\quad a_j \in \mathbb{Z}$ $\quad (a_j : b_j) = 1$.
$b_j \in \mathbb{N}$

C = MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO $(b_0, b_1, b_2 \dots b_m)$

Ej:

$$f = \frac{2}{5} X^4 + \frac{3}{25} X^2 + \frac{2}{5} X + \frac{7}{2}$$

$MCM(5, 25, 2) = 50$.

$50 \cdot f = 20x^4 + 6x^2 + 20x + 175$.

DEFINICIÓN: $f \in \mathbb{Z}[x]$ EL CONTENIDO DE f ES EL $MCD(a_0, a_1, \dots a_m)$.

Ej EN EL POL ANTERIOR $50 \cdot f$

$MCD(20, 6, 175) = 1$

ENTONCES $50 f$ TIENE CONTENIDO 1

Ej2 $f = 4X^4 + 6X^3 + 10X - 14$

$CON(f) = 2$.

$f = 2 \cdot \underbrace{(2X^4 + 3X^3 + 5X - 7)}_{\text{CONTENIDO } 1}$.

LEMA: SI $f \in \mathbb{Z}[x]$ Y $\alpha \in \mathbb{Z}$ ENTONCES

$$\text{CONT.}(\alpha . f) = \alpha . \text{CONT}(f)$$

ADEMÁS $f = \text{CONT}(f) . \tilde{f}$ CON $\text{CONT}(\tilde{f}) = 1$

$(\tilde{f} \in \mathbb{Z}[x])$.

ESTO INDICA QUE PARA VER SI f ES IRREDUCIBLE, ALCANZA CON VER QUE $\tilde{f}$, QUE TIENE CONTENIDO 1, ES IRREDUCIBLE.

LEMA DE GAUSS.

SI $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ AMBOS CON CONTINIDO 1 ENTONCES $f . g$ TAMBIÉN TIENE CONTENIDO 1.

DEM.

$$f = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i \qquad g = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$$

$$g . f = \sum_{l=0}^{m+m} c_l X^l.$$

SUPONGAMOS $\text{CONT}(g\, f) > 1$

$\Rightarrow \exists\, p \in \mathbb{N}$ PRIMO, $p \mid c_l \quad \forall\, 0 \leq l \leq m+m$

COMO $\text{CONT}(f) = 1$.

$\Rightarrow p$ NO DIVIDE A TODOS LOS a_i

ELIJO i_0 EL MENOR i TAL QUE $p \nmid a_i$

IDEM CON g, TOMAMOS j_0 EL MENOR j TAL QUE $p \nmid b_j$

MIREMOS AHORA EL COEFICIENTE $C_{i_0+j_0}$ DE $g.f$ (EL QUE ACOMPAÑA A $X^{i_0+j_0}$.

$$C_{i_0+j_0} = \underline{a_{i_0} b_{j_0} + a_{i_0+1} b_{j_0-1} + a_{i_0+2} b_{j_0-2} \dots}$$

$$\underline{\dots + a_{i_0+j_0} . b_0} + \underline{a_{j_0-1} . b_{j_0+1} + a_{i_0-2} b_{j_0+2} \dots + a_0 . b_{i_0+j_0}}$$

VALE QUE P DIVIDE A LO ROJO. (PORQUE EN C/SUMANDO APARECE UN b_j CON $j < j_0$ ENTONCES $p \mid b_j$)

" " " " A LO NEGRO. (XQ EN C/SUMANDO APARECE UN a_i CON $i < i_0$ ENTONCES $p \mid a_i$)

COMO $p \mid C_{i_0+j_0}$ ENTONCES CONCLUIMOS QUE

$p \mid a_{i_0} b_{j_0}$. (ESTO ES ABS) (XQ $p \nmid a_{i_0}$ y $p \nmid b_{j_0}$)

ENTONCES EL CONTENIDO $(f.g) = 1$.

<u>COROLARIO</u>: $f, g \in \mathbb{Z}[x]$

ENTONCES CONT $(f.g) =$ CONT(f) . CONT(g)

<u>DEM</u>: $f = \text{CONT}(f) . \tilde{f}$

$g = \text{CONT}(g) . \tilde{g}$.

$\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathbb{Z}[x]$. CON CONT. 1 ENTONCES:

CONT $(f.g) =$ CONT $(\tilde{f}.\text{CONT}(f) . \tilde{g} . \text{CONT}(g))$

$=$ CONT (f) CONT (g) $\underbrace{\text{CONT } (\tilde{f}.\tilde{g})}_{\substack{= \\ 1}}$. LEMA DE GAUSS.

$=$ CONT (f) . CONT (g)

<u>COROLARIO 1</u>: Si $f \in \mathbb{Z}[x]$ ES IRREDUCIBLE EN $\mathbb{Z}[x]$. sii f ES IRREDUCIBLE EN $\mathbb{Q}[x]$ y CONT $(f) = 1$

<u>COROLARIO 2</u>: Si $f \in \mathbb{Q}[x]$ si $c.f \in \mathbb{Z}[x]$ $c \in \mathbb{Z}$. y cf TIENE CONTENIDO 1. ENTONCES f ES IRREDUCIBLE EN $\mathbb{Q}[x]$ sii cf ES IRREDUCIBLE EN $\mathbb{Z}[x]$

CRITERIOS DE FACTORIZACIÓN EN $\mathbb{Z}[x]$

1) LEMA DE GAUSS.

2) CRITERIO DE EINSENSTEIN.

Si $f \in \mathbb{Z}[x]$ $f = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$.

$a_m \neq 0$. Si $\exists$ $p \in \mathbb{N}$ PRIMO TAL QUE $p \mid a_j$ $\forall$ $0 \leq j < m$ $\quad p \nmid a_m \wedge p^2 \nmid a_0$

ENTONCES f ES IRREDUCIBLE EN $\mathbb{Q}[x]$

APLICACIÓN

Ej $f = X^m - 2$. ES IRRED. EN $\mathbb{Z}[x]$ (o $\mathbb{Q}[x]$) $\forall m \in \mathbb{N}$.

DEM: USEMOS EINSENTEIN, CON $p = 2$. $\blacksquare$

Ej: $\dfrac{X^p - 1}{X - 1} = \sum_{i=0}^{p-1} X^i$ (P PRIMO)

TODOS LOS COEFICIENTES SON 1. ASÍ NO PODEMOS USAR ~~EINSTEIN~~ EINSENTEIN.

HACEMOS EL CAMBIO DE VARIABLE $X = Y + 1$.

ENTONCES $\sum_{i=0}^{p-1} (Y+1)^i = \dfrac{(Y+1)^p - 1}{Y}$

$$= \frac{Y^p + \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p}{j} Y^{j-1} + 1 - 1}{Y}$$

$$= Y^{p-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p}{j} Y^{j-1}$$

$$\Rightarrow p \mid \binom{p}{j} \quad \forall \quad 1 \leq j \leq p-1$$

ADEMÁS $p^2 \nmid \binom{p}{1}$ $\Rightarrow$ ES IRREDUCIBLE EL POLINOMIO EN Y

$\Rightarrow$ ES IRREDUCIBLE EL POLI EN X.