RAICES RACIONALES.

25/6

RECORDAR $f \in \mathbb{Z}[x]$

$f = \sum_{j=0}^{m} a_j X^j$ si $P/q \in \mathbb{Q}$

$(P \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\ (P:q) = 1)$ y P/q ES RAIZ DE f,

ENTONCES $q \mid a_m$, $P \mid a_0$

<u>OBS</u>: Si $f \in \mathbb{Z}[x]$ MÓNICO , $a_m = 1$ ENTONCES LAS RAICES RACIONALES SON ENTERAS (PORQUE $q = 1$)

Ej $f = X^3 - 3X - 52$

HALLAR, SI TIENE, TODAS SUS RAICES RACIONALES

<u>RTA</u>: Si P/q ES RAIZ $\Rightarrow$ $P \mid 52$ y
$q \mid 1$

$\Rightarrow q = 1$ y $P \in \mathrm{Div}(52) =$

$= \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 13, \pm 26, \pm 52\}$

Si f TIENE RAIZ RACIONAL, EN VERDAD TIENE RAIZ ENTERA, Y LOS ÚNICOS POSIBLES VALORES SON LOS DIV (52)

HAY QUE REEMPLAZAR LOS DIV (52) EN f Y VER CUALES DAN 0

4 ES RAIZ DE f.

b) FACTORIZAR f EN $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ Y EN $\mathbb{C}[x]$

$x-4 \mid f$ $\quad$ (XQ $f(4)=0$)

$$
\begin{array}{l|l}
X^3 - 3X - 52 & X-4 \\ \hline
4X^2 - 3X - 52 & X^2 + 4X + 13 \\
13X - 52 & \\
0 &
\end{array}
$$

$f = \underbrace{(X-4)}_{\text{IRRED.}}(X^2 + 4X + 13)$

VEAMOS SI $X^2 + 4X + 13$ ES IRRED. EN $\mathbb{Q}$: SÍ, ES IR ⊛1

$\mathbb{R}$: SÍ ⊛2

$\mathbb{C}$: NO

⊛1 ES IRREDUCIBLE POR SER DE GRADO DOS, SIN RAICES EN $\mathbb{Q}$

⊛3 Y ⊛2 CALCULEMOS LAS RAICES DE $X^2 + 4X + 13$

$$\frac{-4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = -2 \pm 3\sqrt{-1}$$

$$= -2 \pm 3i$$

$\Rightarrow$ EL POLINOMIO NO TIENE RAICES REALES (PORQUE $b^2 - 4ac < 0$). COMO ES DE GRADO 2, ENTONCES ES IRRED.

⊛3 EN $\mathbb{C}[X]$ SE FACTORIZA COMO

$(X - (-2+3i))(X - (-2-3i))$

IRREDUCIBILIDAD DE POLINOMIOS CUADRATICOS

$f = aX^2 + bX + c$, $f \in K[x]$, CON $\mathrm{Char}(K) \neq 2$

TEOREMA

f ES IRREDUCIBLE EN $K[x]$ sii f NO TIENE RAICES EN K.

ADEMÁS, SI $b^2 - 4.a.c \in K$ (SE LLAMA EL DISCRIMINANTE DE f) ES UN CUADRADO EN K, ES DECIR $\exists\, w \in K$: $w^2 = b^2 - 4ac$, ENTONCES f ES REDUCIBLE EN $K[x]$ Y LAS RAICES SE CONSIGUEN A PARTIR DE LA RESOLVENTE.

SI f REDUCIBLE $\not\Rightarrow$ $b^2 - 4ac$ ES UN CUADRADO

OBSERVACIONES:

1) $2a = a + a$

2) COMO SUPONEMOS $\mathrm{Char}(K) \neq 2$ $\quad 2a \neq 0$

3) DIVIDIR POR $2a$ ES EN VERDAD MULTIPLICAR POR $(2a)^{-1}$

DEMOSTRACIÓN:

SI $f \in K[x]$ ES DE $gr\ 2$, ENTONCES f ES REDUCIBLE

sii $f = \alpha g . h$ CON $0 < gr\, g < gr\, f = 2$ y $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$

$0 < gr\, h < gr\, f = 2$

g, h MÓNICOS

OBS: α ES EL COEFICIENTE PRINCIPAL DE f

$\Rightarrow g, h$ MÓNICOS y $gr = 1$

$\Rightarrow g = (X - x_1)$ y $h = (X - x_2)$

$\Rightarrow x_1$ y x_2 RAICES DE f.

OSEA, DEMOSTRAMOS QUE f REDUCIBLE $\Rightarrow$ f TIENE RAICES EN K

$gr\ 2$

LA VUELTA ES MÁS GENERAL AÚN, SI f TIENE RAIZ

$x_1 \in K \Rightarrow X - x_1 \mid f$.

$\Rightarrow f$ ES REDUCIBLE (SALVO CUANDO $gr(f) = 1$)

VEAMOS EL ENUNCIADO DE $b^2 - 4ac$

$aX^2 + bX + c$ COMPLETANDO CUADRADOS

$$a\,(X^2 + b/a\,X) + c$$

$$= a\left[X^2 + b/a\,X + (b/2a)^2 - (b/2a)^2\right] + c.$$

$$= a\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$= a\left[\left(X + b/2a\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

POR HIPOTESIS $b^2 - 4ac = w^2$ CON $w \in K$. ENTONCES LA FORMULA QUEDA

$$a \cdot \left[\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(w/2a\right)^2\right]$$

$$= a \cdot \left(X + \frac{b}{2a} + \frac{w}{2a}\right)\left(X + \frac{b}{2a} - \frac{w}{2a}\right)$$

$$= a\left(X + \frac{b+w}{2a}\right)\left(X + \frac{b-w}{2a}\right)$$

POR LO TANTO LAS RAICES SON.

$$\frac{-b-w}{2a} \qquad \frac{-b+w}{2a}.$$

VEAMOS LA VUELTA

SI f TIENE RAICES $\Rightarrow b^2 - 4ac$ ES UN CUADRADO

$f = a(X-\alpha)(X-\beta)$ α, β K RAICES.

ENTONCES $a\alpha\beta = c$

$a(-\alpha-\beta) = b$.

ENTONCES $b^2 - 4ac = a^2(-\alpha-\beta)^2 - 4a^2\alpha\beta$

$= a^2[\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\alpha\beta]$

$= a^2[\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2]$

$= a^2 . (\alpha-\beta)^2$

$= [a(\alpha-\beta)]^2$ $w = a(\alpha-\beta)$

Ej DECIDIR SI $3X + 4X + 6$ ES IRREDUCIBLE EN $\mathbb{Z}/_{11}\mathbb{Z}$

POR EL TEO, VEO SI $b^2 - 4ac$ ES UN $\square$ EN $\mathbb{Z}/_{11}\mathbb{Z}$

$b^2 - 4ac = 5 - 6 = -1 = 10$

¿ES -1 UN CUADRADO EN $\mathbb{Z}/_{11}\mathbb{Z}$.

$1^2 = 1$

$2^2 = 4$

$3^2 = -2$

$4^2 = 5$

$5^2 = 3$

$6^2 = 3$.

SEGUIMOS FACTORIZANDO POLINOMIOS EN $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$

EL TEO ANTERIOR CARACTERIZA QUE POL DE gr = 2 SON IRRED. EN $\mathbb{Q}[x]$ CUANDO $b^2 - 4ac$ ES UN CUADRADO EN $\mathbb{Q}$ ⟹ f ES REDUC.

NOTA

EN $\mathbb{R}[x]$ CUANDO $b^2 - 4ac$ ES UN CUADRADO EN $\mathbb{R}[x]$ O SEA CUANDO $b^2 - 4ac \geq 0$ f ES REDUCIBLE.

EN $\mathbb{C}[x]$ CUANDO $b^2 - 4ac$ ES UN CUADRADO EN $\mathbb{C}$, O SEA <u>SIEMPRE</u>, f ES REDUCIBLE.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA:

$f \in \mathbb{C}[X]$ $gr f > 0 \Rightarrow \exists z \in \mathbb{C} : f(z) = 0$.

(TODO POL CON COEF. EN $\mathbb{C}$ TIENE RAIZ EN $\mathbb{C}$).

<u>COROLARIO.</u>

EN $\mathbb{C}[x]$ LOS ÚNICOS POLS IRREDUCIBLES SON DE GRADO 1

<u>DEMOSTRACIÓN</u>: SI $f \in \mathbb{C}[x]$ $gr f > 0$.

$\Rightarrow \exists z \in \mathbb{C}$ $f(z) = 0$.

$\Rightarrow X - z \mid f \Rightarrow f = (X - z) \cdot g$

ENTONCES SI $gr f > 1 \Rightarrow f$ IRRED.

<u>COROLARIO:</u>

SI $f \in \mathbb{C}[x]$ $gr f = m > 0$.

$\Rightarrow f = c(f) \cdot \prod_{j=1}^{m} (X - z_j)$ $z_j \in \mathbb{C}$.

NOTACIÓN: f SE FACTORIZA LINEALMENTE SI LOS ~~FACTORES~~ POL IRREDUCIBLES EN SU FACTORIZACIÓN SON TODOS DE GRADO 1.

PROPIEDAD:

SI $f \in \mathbb{R}[X]$ y $z \in \mathbb{C}$ ES RAIZ DE f ENTONCES $\bar{z}$ ES RAIZ DE f.

DEMOSTRACIÓN.

$$f = \sum_{j=0}^{m} a_j X^j$$

$$0 = f(z) = \sum_{j=0}^{m} a_j z^j$$

TOMANDO CONJUGACIÓN QUEDA

$$\bar{0} = \overline{f(z)} = \overline{\sum_{j=0}^{m} a_j z^j}$$

$$0 = \overline{f(z)} = \sum_{j=0}^{m} \bar{a_j} \bar{z}^j$$

$$0 = \overline{f(z)} = \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot \bar{z}$$

$$0 = \overline{f(z)} = f(\bar{z})$$

COROLARIO: SEAN $f \in \mathbb{R}[X]$ y $z \in \mathbb{C}$, $Im(z) \neq 0$ (O SEA $z \notin \mathbb{R}$). EQ $f(z) = 0$ $\Rightarrow f(\bar{z}) = 0$.

$$\bar{z} \neq z \Rightarrow (X - z)(X - \bar{z}) \mid f.$$

$$= (X - z)(X - \bar{z}) = X^2 - (z + \bar{z}) X + |z|^2$$

$$= X^2 - 2Re(z) X + |z|^2 \in \mathbb{R}[X]$$

COROLARIO: EN $\mathbb{R}[x]$

LOS ÚNICOS POLI IRREDUCIBLES SON

a) LOS DE GRADO 2 CON $b^2-4ac<0$.

DEMOSTRACIÓN:

$f \in \mathbb{R}[x]$ LO FACTORIZO (ÚNICAMENTE) EN $\mathbb{C}[x]$

SI f TIENE RAICES REALES Y $gr\ f > 1$

f REDUCIBLE

SI $gr\ f > 1$ Y NO TIENE RAICES REALES,

ENTONCES $\exists\ z \in \mathbb{C},\ z \notin \mathbb{R}\ \ f(z)=0$

$\Rightarrow f(\bar{z}) = 0 \Rightarrow$ ~~[illegible]~~.

$(x-z)(x-\bar{z}) \mid f$

SI $gr\ f = 2 \Rightarrow f = c(f)\underbrace{(x-z)(x-\bar{z})}_{\text{IRRED EN } \mathbb{R}[x]}$

SI $gr\ f > 2 \Rightarrow f$ ES REDUCIBLE.

(UN DIVISOR PROPIO DE f ES $(x-z)(x-\bar{z})$.

Ej $f = (x^2+4)(x^2+9) \in \mathbb{R}[x]$.

f NO TIENE RAICES EN $\mathbb{R}$ PERO ES

REDUCIBLE EN $\mathbb{R}[x]$.

PARTE PRÁCTICA