18/6

TEOREMA: $(f:g)$ ES C.L. DE $f$ Y $g$
"POLINOMIAL"

SI $d|f \wedge d|g \Rightarrow d|(f:g)$

$(f:g) | f.k + g.l \quad \forall k, l \in \mathbb{K}[X]$

ADEMÁS, $(f:g)$ ES ÚNICO

DEMOSTRACIÓN: SEA $A := \{\overbrace{f.k + g.l}^{\text{MÓNICO}} \quad k, l \in \mathbb{K}[X]\}$

$A$ ES NO VACÍO: $f/c(f) \in A$, $g/c(g) \in A$

SEA $h \in A$ NO NULO DE GRADO MÍNIMO (POR ESTAR EN $A$, $h$ ES MÓNICO)

$h|f \wedge h|g$

VEAMOS ESTA

$f = h.f + r \Rightarrow r = f - hf$ ES C. POLINOMIAL DE $f$ Y $g$
COMBINACIÓN

ENTONCES, SI $r \neq 0$, $r/c(r) \in A$

ESTO NO PUEDE OCURRIR, PORQUE $gr(r/c(r)) = gr(r) < gr(h)$

ENTONCES $r = 0$

ENTONCES $h | f.k + g.l \quad \forall k, l \in \mathbb{K}[X]$

ADEMÁS, COMO $h \in A$, ENTONCES SI $d|f \wedge d|g \Rightarrow d|h$

VEAMOS QUE $h$ ES ÚNICO: SI HUBIESE $h' \in A$ DE GRADO MÍNIMO

ENTONCES $h|h'$ Y $h'|h \Rightarrow h = ch'$ CON $c \in \mathbb{K}$, $c \neq 0$

$c = 1$ PORQUE $h$ Y $h'$ SON MÓNICOS

Fecha:

PARA CONCLUIR, VEAMOS QUE $h=(f:g)$:

1) $h\mid f$ y $h\mid g \Rightarrow \boxed{gr\, h \leq gr\,(f:g)}$

2) COMO $(f:g)\mid f$ y $(f:g)\mid g \Rightarrow (f:g)\mid h \Rightarrow \boxed{gr\,(f:g)\leq gr\, h}$

$\Rightarrow (f:g)=h$ ∎

---

## COROLARIO:

$c_p(f)$ = COEFICIENTE PRINCIPAL DE $f$

1) $(f:g)=(g:f-g\cdot q)=(g:r_g(f))$

2) $(f:0)=f/c_p(f)$

DEM: FÁCIL

ESTO DA EL ALGORITMO DE EUCLIDES PARA POLINOMIOS

Ej: HALLAR $(x^5-5 : x^4-3x+2)$ Y ESCRIBIRLO COMO C. POLINOMIAL DE ELLOS

$$\begin{array}{l|l} x^5-x & x^4-3x+2 \\ \hline x^5-3x^2+2x & x \\ \hline 3x^2-3x & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^4-3x+2 & x^2-x \\ \hline \cancel{x^4+x^3+x^2} & x^2+x+1 \\ \cancel{x^3+2x^2-3x+2} & \\ x^4-x^3 & \\ \hline x^3-3x+2 & \\ x^3-x^2 & \\ \hline x^2-3x+2 & \\ x^2-x & \\ \hline -2x+2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^2-x & x-1 \\ \hline & x \\ 0 & \end{array}$$

RTA: $x-1$ ES EL M.C.D.

$$x-1=-\frac{1}{2}\left(x^4-3x+2-(x^2-x)(x^2+x+1)\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{x^4-3x+2-\frac{1}{3}\left[(x^5-x)-(x^4-3x+2)\cdot x\right](x^2+x+1)\right\}$$

MENOS

~~DESARROLLO~~ ~~CUENTAS~~

ORDENANDO QUEDA: $x-1=(x^5-x)\left[\frac{1}{6}(x^2+x+1)\right]+(x^4-3x+2)\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}(x^3+x^2+x)\right)\right]$

DEFINICIÓN: $f, g \in \mathbb{K}[X]$ SON COPRIMOS SI $(f : g) = 1$

PROP 1:

SUPONGAMOS $(f : g) = 1$:

1) $f | h \wedge g | h \Rightarrow f \cdot g | h$

2) SI $g | h \cdot f \Rightarrow g | h$

PROP 2: SI $f$ ES IRREDUCIBLE; ENTONCES

a) $(f : g) = \begin{cases} 1 & \text{SI } f \nmid g \\ f/_{cp(f)} & \text{SI } f | g \end{cases}$

b) $f | g \cdot h \Rightarrow f | g$ O $f | h$ (DEM b) SE DEDUCE DE 2) Y a))

—o—

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA PARA POLINOMIOS

$f \in \mathbb{K}[X]$, $f \neq 0$. $\exists! \, g_1, g_2, \ldots, g_r \in \mathbb{K}[X]$ IRREDUCIBLES Y MÓNICOS Y ÚNICAS CONSTANTES $r_1, r_2, \ldots, r_l \in \mathbb{N}$ Y $c \in \mathbb{K}$ TAL QUE

$f = c \cdot g_1^{r_1} g_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot g_l^{r_l}$ $c = c_p(f)$

---

EVALUACIÓN Y RAÍCES

DADO $f \in \mathbb{K}[X]$, SE DEFINE UNA FUNCIÓN $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \to f(x)$

(REEMPLAZAR $X$ POR $x$ Y HACER LAS CUENTAS EN $\mathbb{K}$)

EJ: $f = X^3 - X - 1$ EN $\mathbb{R}[X]$

$f(0) = -1$ $f(2) = 5$

$f(1) = -1$

EJ: $f = X^p - X$ EN $\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}[X]$ $p$ PRIMO

$gr(f) = p$, $f$ ES MÓNICO

$f(x) = x^p - x = 0$ EN $\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$ POR FERMAT

- ESTE EJEMPLO MUESTRA QUE UN POLINOMIO $f \in \mathbb{K}[X]$ NO ES LO MISMO QUE LA FUNCIÓN $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \to f(x)$

Hoja:

Fecha:

**OBS**: Si $f = \sum_{j=0}^{m} a_j X^j$, $a_j \in \mathbb{K}$

$f(0) = a_0$ = el término independiente

**Ej**: $f \in \mathbb{R}[X]$,
$f(1)=1$
$f(2)=0$
$f(3)=1$

Sea $g = (X-1)\cdot(X-2)\cdot(X-3)$

**Rta**: $f = g \cdot q + r$ con $r = 0$ o $gr\, r \leq 2$

$\Rightarrow r = ax^2 + bx + c$

~~Ahora~~ Hay que hallar $a$, $b$ y $c$.

$1 = f(1) = \underbrace{g(1)\cdot q(1)}_{0} + r(1) = r(1)$

$0 = f(2) = r(2)$

$1 = f(3) = r(3)$

$r(1) = a + b + c = 1$
$r(2) = a4 + b2 + c = 0$
$r(3) = a9 + b3 + c = 1$

Da el sistema
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Se resuelve y da $c = 4$ $b = -4$ $a = 1$

$r = X^2 - 4X + 4$

---

**Prop**: Si $x \in \mathbb{K}$:

$$\boxed{r_{X-x}(f) = f(x)}$$

**Demostración**: $f = (X - x)q + r$ con $r = 0$ o $gr\, r = 0$

$\Rightarrow r$ es una constante

Por otra parte, si evaluamos $f$ en $x$ nos queda

$f(x) = (x - x)\, q(x) + r \Rightarrow f(x) = r$
$= 0\, q(x) + r$

Notas:

**DEFINICIÓN:** $x \in \mathbb{K}$ ES RAÍZ DE $f \in \mathbb{K}[X]$ sii $f(x)=0$ sii $X - x \mid f$

**PROPIEDAD:** $f, g \in \mathbb{K}[X]$, $x \in \mathbb{K}$ ES RAÍZ DE $f$ y $g$ SI Y SOLO SI $x$ ES RAÍZ DE $(f:g)$

**DEM:**

SI $f(x)=0$ y $g(x)=0$ ENTONCES $f(x) \cdot k(x) + g(x) \cdot j(x) = 0$ $\forall k, j \in \mathbb{K}[X]$

$\Rightarrow x$ ES RAÍZ DEL POLINOMIO $f \cdot k + g \cdot j$, $\forall k, j \in \mathbb{K}[X]$

COMO $(f:g)$ ES DE ESTA MANERA $\Rightarrow x$ ES RAÍZ DE $(f:g)$

LA VUELTA: SI $x$ ES RAÍZ DE $(f:g)$, COMO $f = (f:g) \cdot k$, $k \in \mathbb{K}[X]$ $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= (f:g)(x)\, k(x) \\ &= 0\, k(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$
(IDEM CON $g$)

---

**RAÍCES MÚLTIPLES**

DADO $f \in \mathbb{K}[X]$, $f \neq 0$,

$x \in \mathbb{K}$ ES RAÍZ DE $f$ CON MULTIPLICIDAD $k$, $k \in \mathbb{N}_0$ SI

$(X - x)^k \mid f$ y $(X - x)^{k+1} \nmid f$

(ES LA POTENCIA MÁS DE $(X - x)$ QUE DIVIDE A $f$)

**OBSERVACIÓN:** SI $k=0$ QUIERE DECIR QUE $x$ NO ES RAÍZ DE $f$

**OBSERVACIÓN 2:** $x$ TIENE MULTIPLICIDAD $k$ EN $f$ SI $f = (X - x)^k \cdot g$ CON $g(x) \neq 0$

**NOTACIÓN:** LA MULTIPLICIDAD DE $x \in f$ SE DENOTA

$$\text{mult}(x, f)$$

**DEFINICIÓN:** $x \in \mathbb{K}$ ES RAÍZ SIMPLE DE $f$ SI $\text{mult}(x, f) = 1$

$x \in \mathbb{K}$ ES RAÍZ MÚLTIPLE DE $f$ SI $\text{mult}(x, f) \geq 2$

Hoja:

Fecha:

## ~~Polinomio~~ Polinomio Derivado

Dado $f \in \mathbb{K}[X]$, $f = \sum_{j=0}^{m} a_j X^j$, definimos el polinomio derivado de $f$ como el polinomio

$$\boxed{f' = \sum_{j=1}^{m} a_j \, j \, X^{j-1}}$$

Ej: Si $f = 3X^2 + 1X + 3 \in \mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}[X]$

$f' = 3 \cdot 2X + 1 \cdot 1 = X + 1$

**Propiedades del pol derivado** $f, g \in \mathbb{K}[X]$

1) $(f+g)' = f' + g'$
2) $(f g)' = f' g + f g'$
3) $(f(g))' = f'(g) \cdot g'$ (Regla de la cadena)
4) Si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C} \Rightarrow gr\, f' = gr\, f - 1$ si $gr\, f \geq 1$,
4') Si $gr\, f = 0$ o $f = 0 \Rightarrow f' = 0$

Pero, si $f \in \mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$ entonces vale que
- o bien $f' = 0$
- o bien $gr\, f' < gr\, f$

**Dem de 4)** ($f \neq cte$ $m \geq 1$)

Si $f = \sum_{j=0}^{m} a_j X^j$; $f' = \sum_{j=1}^{m} a_j \, j \, X^{j-1}$

En $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$, $a_m \cdot m \neq 0$

$\Rightarrow gr\,(f') = m - 1$

En $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $a_m \cdot m$ puede ser 0 cuando $p \mid m$

$\Rightarrow$ $f'$ puede ser 0

o $gr\, f \leq m - 1$

Notas:

Scanned by CamScanner

Ej: En $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

$F = \overline{X}^7 + 6\overline{X}^5 + 2\overline{X}^4 + 3$

$F' = 2\overline{X}^4 + 1\overline{X}^3$

Ej: En $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ $\quad f = \overline{X}^p + \overline{X}$

$f' = 1$

$g = \overline{X}^{8p} + \overline{X}^p + 1$

$g' = 0$