Fecha:

4/6

NÚMEROS COMPLEJOS

RECORDAR: Vimos que $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un cuerpo si y solo si m es un número primo.

(También vimos que $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad)

(Cuerpo es si, además, $\forall a \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $\exists b \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ tq $a \cdot b = 1$)

EJEMPLOS DE ANILLOS CONMUTATIVOS CON UNIDAD.

1) $\mathbb{Z}$ (no es un cuerpo)

2) $\mathbb{Q}$ (es un cuerpo $\rightarrow$ si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, con $a, b \neq 0$, el inverso es $\frac{b}{a}$)

3) $\mathbb{R}$ (es un cuerpo

4) $\mathbb{C}$, los números complejos, (son un cuerpo)

5) $\mathbb{R}[X]$ = {conjunto de polinomios con coeficientes reales}

$$= \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \text{ con } a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$\mathbb{R}[X]$ no es un cuerpo: multiplicar un polinomio de grado n por otro de grado m da un polinomio de grado $n+m$

Ej: el pol. de grado 1 $\rightarrow X - 2$ no tiene inverso multiplicativo

$$(X-2)\cdot f(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(X)=0 \\ \text{tiene grado} \geq 1 & \text{si } f(X) \neq 0 \end{cases}$$

Ej: $M_n(\mathbb{R})$ = {matriz de $n \times n$ con coef. reales}

Es un anillo no conmutativo con unidad: $I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

6) $C(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ continuas}\}$ es anillo conmutativo con unidad

No es un cuerpo. Ej: $F(X) =$

$\nexists\, g(x)$ continua tq $F(X) \cdot g(X) = 1$

Si $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cont, $F(x)\neq 0\ \forall x$, entonces $\dfrac{1}{F(x)}$ es cont. y $F(x)\cdot\dfrac{1}{F(x)}=1$

Números Complejos

Problema "histórico": $X^2+1=0$ no tiene solución en $\mathbb{R}$

(porque todo número real al cuadrado es ≥ 0)

Se define con símbolo i que verifica $i^2+1=0$

Entonces la ecuación $X^2+1=0$ tiene (al menos) dos soluciones.

$i, -i$, porque $i^2=-1$, $(-i)^2=(-1)^2\cdot i^2=1\cdot(-1)=-1$

Además, $i\neq -i$ porque sino, multiplicando por i quedaría que si

$i=-i \Rightarrow i(i)=i(-i)$

$-1=1$ Abs

Obs: (Increíble)

El símbolo i es lo "único" que hay que agregar a $\mathbb{R}$ para que todo polinomio en $\mathbb{R}[X]$ tenga raíz.

Números Complejos:

$\mathbb{C}$ es el conjunto $\mathbb{C}=\{a+ib,\ a,b\in\mathbb{R}\}$

con las operaciones $(\mathbb{C},+,\cdot)$

Se define $(a+ib)+(\tilde{a}+i\tilde{b})=a+\tilde{a}+i(b+\tilde{b})$

Se define $(a+ib)\cdot(\tilde{a}+i\tilde{b})=(a\cdot\tilde{a}-b\cdot\tilde{b})+i\cdot(a\tilde{b}+\tilde{a}b)$

Vale $(\mathbb{C},+,\cdot)$ es un cuerpo

Ej: $z=2+i3$ $\quad w=-1+4i$ $\quad zw=(2+i3)(-1+4i)=-2+8i+(-3)i-12=-14+i5$

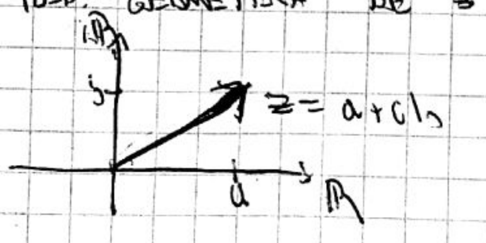
$z+w=1+7i$

SI $z = a + ib \in \mathbb{C}$, ES LA FORMA CARTESIANA DEL NUMERO COMPLEJO z

LA PARTE REAL DE z ES EL NÚMERO $\mathrm{Re}(z) = a \in \mathbb{R}$

LA PARTE IMAGINARIA DE z ES EL NÚMERO $\mathrm{Im}(z) = b \in \mathbb{R}$

LA REP. GEOMÉTRICA DE z ES



(O SEA A z LO REPRESENTAMOS COMO EL VECTOR (a, b))

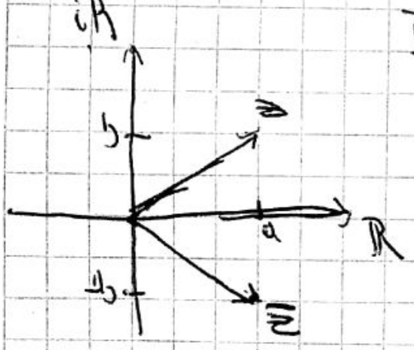
LA SUMA EN $\mathbb{C}$ CORRESPONDE CON LA SUMA DE VECTORES.

—o—

DEFINICIÓN: EL CONJUGADO DE UN NUMERO COMPLEJO $z = a + ib$ ES EL NUMERO $\bar{z} = a - ib$

$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(\bar{z})$

$\mathrm{Im}(z) = -\mathrm{Im}(\bar{z})$



PROPOSICIÓN: $z \cdot \bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R} \geq 0$

—o—

DEFINICIÓN: SI $z = a + ib$, EL MODULO DE z ES EL NUMERO REAL ≥ 0

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

—o—

PROPIEDAD: $|z| = 0 \iff a^2 + b^2 = 0 \iff a = 0 \wedge b = 0 \iff z = 0$

(REPRESENTA LA LONGITUD DEL VECTOR (a,b))

—o—

PROPIEDAD: INVERSO DE UN NUMERO COMPLEJO $z = a + ib \neq 0$ ES EL NUMERO: $\boxed{z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}}$ (ESTO ES ASÍ PORQUE $z \cdot \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{z \cdot \bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{|z|^2}{|z|^2} = 1$)

Ej: si $z = 2+3i$

$z^{-1} = \frac{2-3i}{2^2+3^2} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$

PROPIEDADES:

1) $z+\bar{z} = 2\cdot \mathrm{Re}(z)$

2) $z-\bar{z} = 2\cdot i\cdot \mathrm{Im}(z)$

3) $\bar{\bar{z}} = z$

4) $z\in\mathbb{R} \iff z=\bar{z}$

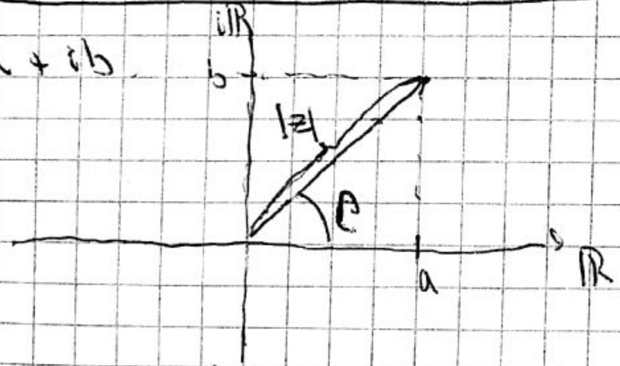
5) $|\mathrm{Re}\, z| \le |z|$, $\quad |\mathrm{Im}\, z| \le |z|$

(ADEMÁS, $|\mathrm{Re}\, z| = |z|$ si y solo si $z\in\mathbb{R}$ (o sea $b=0$)
y $|\mathrm{Im}\, z| = |z|$ sii $z\in i\mathbb{R}$ (o sea $a=0$))

DEF: $z\in\mathbb{C}$, $z=a+ib$ es PURAMENTE IMAGINARIO si $a=0$

FORMA POLAR DE UN NUMERO COMPLEJO

Si $z=a+ib$



LA LONGITUD ES $|z|$ Y EL ÁNGULO ES θ

z SE PUEDE DAR COMO EL PAR $(|z|, \theta)$ CON $|z|>0$ y $0\le\theta<2\pi$

EL $z=0$ LO DESCRIBIMOS COMO $(0, 0)$

DE FORMA POLAR A FORMA CARTESIANA

Si z ESTÁ DADO POR (r, θ) CON $r\in\mathbb{R}_{>0}$, $0\le\theta<2\pi$

$a = r\cos(\theta)$

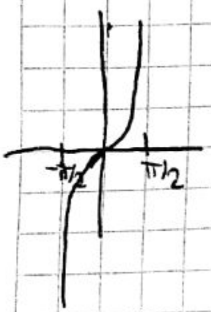
$b = r\,\mathrm{sen}(\theta)$

DE FORMA CARTESIANA A FORMA POLAR

SI z ESTA DADO POR $z = a + ib$, HALLAR LA FORMA POLAR z, (r, θ)

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$tg(\theta) = \frac{|b|}{|a|}$ Y SE DESPEJA θ

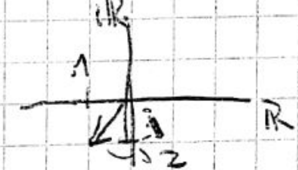


$arctg(x): \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$

SI HACEMOS $arctg\left(\frac{|b|}{|a|}\right) \in [0, \pi/2)$

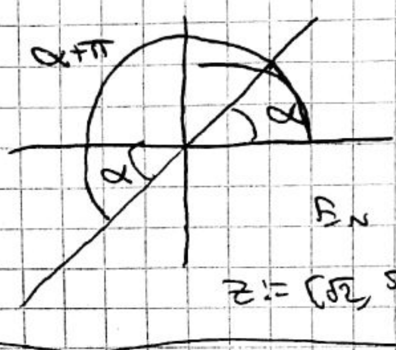
O SEA, LA CALCULADORA DA UN ÁNGULO EN EL PRIMER CUADRANTE.
LUEGO, LOCALIZAMOS EN QUE CUADRANTE ESTA z PARA HALLAR EL VERDADERO ÁNGULO θ.

Ej: $z = -1 - i$



$tg(\alpha) = \frac{|b|}{|a|} = \frac{|-1|}{|-1|} = 1 \Rightarrow \alpha = \pi/4 \rightarrow$ EN EL PRIMER CUADRANTE

ESE α CORRESPONDE A $z = 1 + i$



$\Rightarrow \theta = \alpha + \pi =$ ~~[illegible]~~

EN EL EJEMPLO CONCRETO, $\theta = \pi/4 + \pi = 5\pi/4$

$z := (\sqrt{2}, 5\pi/4)$

OTRAS FORMAS DE ESCRIBIR LA FORMA POLAR DE z:

1) $z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ CON $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$, $0 \leq \theta < 2\pi$ $(0 \; z = 0)$

2) $\boxed{z = \rho \cdot e^{i\theta}}$, $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$, $0 \leq \theta < 2\pi$

VIENE DE LA FORMULA

$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$

(SE DEMUESTRA ESCRIBIENDO LAS SERIES DE TAYLOR DE e^z, $\cos(z)$ Y $\operatorname{sen}(z)$)

FORMULA DE "DE MOIVRE" DE MOIVRE

Si $z = \rho e^{i\theta}$ y $w = r e^{i\varphi}$ ENTONCES

$zw = \rho r e^{i(\theta + \varphi)}$