Práctica 7: Funciones de variación acotada

1 Dada una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, para cada partición $\pi = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ del intervalo $[a,b]$ definimos
$$\pi(f) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|.$$
Demostrar que si $\pi_1 \supset \pi_2$ entonces $\pi_1(f) \geq \pi_2(f)$.

2 Determinar cuáles de las siguientes funciones son de variación acotada en el intervalo $[a,b]$ correspondiente, y en caso de que lo sean dar una cota para $V_a^b(f)$.

(a) $f(x) = \cos(x)$ en $[0, 3\pi]$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ en $[-1, 2]$

(d) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ en $[0,1]$

(e) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

3 Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada y sean $x, y \in [a,b]$ con $x < y$. Demostrar que $V_a^y(f) = V_a^x(f) + V_x^y(f)$.

4 Usando el ejercicio anterior, calcular $V_a^b(f)$ para las funciones de los incisos (a) y (c) del ejercicio 2.

5 Demostrar que si f y g son funciones de variación acotada en $[a,b]$ entonces $f \cdot g$ también lo es.

6 Para cada una de las siguientes funciones de variación acotada, hallar la función v_f (recordar que $v_f(x) = V_a^x(f)$):

(a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 - x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

(b) $f(x) = \sin(x)$ en $[0, 2\pi]$

(c) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ en $[1,4]$

7 Para cada una de las funciones del ejercicio anterior, encontrar explícitamente funciones crecientes g_1 y g_2 tales que $f = g_1 - g_2$.

8 Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 en $[a,b]$. Demostrar que f es de variación acotada y que vale la igualdad $V_a^b(f) = \int_a^b |f'(x)|\, dx$.