Práctica 6: Integral de Riemann-Stieltjes

1 Sea f la función constante igual a 1 en el intervalo $[a,b]$. Demostrar que cualquiera sea la función $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ se cumple que $\int_a^b f\, d\alpha = \alpha(b) - \alpha(a)$.

2 En cada uno de los casos siguientes, analizar la existencia de $\int_0^1 f\, d\alpha$ y calcular su valor en caso de que exista.

(a) $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1, \\ 3 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

¿Cambia algo si sólo sabemos que α es continua en 1?

(b) f la misma del inciso anterior y $\alpha = f$.

3 Calcular las siguientes integrales:

(a) $\int_{-1}^3 x^3\, dx^2$

(b) $\int_0^{\pi/4} x\, d(\sin(x))$

4 Sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función con la siguiente propiedad: para toda función creciente $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, la integral $\int_a^b f\, d\alpha$ existe y es igual a 0. ¿Qué se puede concluir sobre la función α?

Sugerencia. Considerar, para cada $c \in [a,b]$, la función creciente $f_c : [a,b] \to \mathbb{R}$ que vale 0 en $[a,c]$ y 1 en $(c,b]$.

5 Sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ tales que f es continua e integrable respecto de α en $[a,b]$. Sea $c \in (a,b)$ y sea $\beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función tal que $\beta(x) = \alpha(x)$ para todo $x \neq c$. Demostrar que f es integrable respecto de β, y $\int_a^b f\, d\beta = \int_a^b f\, d\alpha$.

¿Sigue valiendo lo anterior si $c = a$ o $c = b$?

6 Sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ y sea $c \in (a,b)$ tal que $\int_a^c f\, d\alpha$ y $\int_c^b f\, d\alpha$ existen. Demostrar que f es integrable respecto de α en $[a,b]$, y $\int_a^b f\, d\alpha = \int_a^c f\, d\alpha + \int_c^b f\, d\alpha$.

7 En algunos textos se presenta la siguiente definición alternativa de la integral de Riemann Stieltjes:

Decimos que $\int_a^b f\, d\alpha = A$ *si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que para toda partición* π *del intervalo* $[a,b]$ *tal que* $\|\pi\| < \delta$ *se cumple que* $|S_\pi - A| < \varepsilon$*, independientemente del valor de los puntos intermedios* t_k.

Esta definición es ligeramente más restrictiva que la vista en clase.

(a) Demostrar que si f es integrable respecto de α con esta nueva definición, entonces también lo es con la definición vista en clase.

(b) Sea $c \in (a,b)$ y sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \leq x \leq c \\ 1 & \text{si } c < x \leq b \end{cases} \qquad \alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \leq x < c \\ 1 & \text{si } c \leq x \leq b \end{cases}$$

Demostrar que f es integrable respecto de α según la definición vista en clase, pero no lo es según esta nueva definición.

8 (a) Sean $f, g, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ tales que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, α es creciente, y f y g son integrables respecto de α. Demostrar que $\int_a^b f \, d\alpha \leq \int_a^b g \, d\alpha$.

(b) Mostrar con un ejemplo que el resultado anterior no es cierto si se omite la hipótesis de que α es creciente.

(c) Deducir de (a) que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable respecto de una función creciente $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ entonces $\left| \int_a^b f \, d\alpha \right| \leq \int_a^b |f| \, d\alpha$.

9 Para cada $x \in \mathbb{R}$ denotamos $\lfloor x \rfloor$ a la parte entera de x, es decir, el mayor entero que es menor o igual que x. Calcular las siguientes integrales:

(a) $\int_0^4 x^2 \, d(\lfloor x \rfloor)$ (b) $\int_0^2 x \, d(x - \lfloor x \rfloor)$

10 Sean $f, \alpha : [2,3] \to \mathbb{R}$ las funciones $f(x) = \lfloor x \rfloor$ y $\alpha(x) = \lfloor x^2 \rfloor$. Determinar si f es integrable respecto de α.

11 Sea $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función creciente y continua en 1. Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ la función x^n es integrable respecto de α, y vale que $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 x^n \, d\alpha = 0$.