Práctica 3: Topología de $\mathbb{R}^n$

1 Para cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$, determinar si son abiertos, si son cerrados y si son acotados.

(*a*) $(0,1]$

(*b*) $\mathbb{Q}$

(*c*) $\mathbb{N}$

(*d*) $(0,+\infty)$

(*e*) $\{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2} : n\in\mathbb{N}\}$

(*f*) $\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\}$

2 Para cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, determinar si son abiertos, si son cerrados y si son acotados.

(*a*) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>1\}$

(*b*) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1<x<2\}$

(*c*) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq y\}$

(*d*) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy\neq 0\}$

(*e*) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=y\}$

(*f*) $[0,1]\times(0,1)$

3 Sean S y T subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Demostrar las siguientes propiedades:

(*a*) Si $S\subseteq T$, entonces $S^\circ\subseteq T^\circ$. ¿Vale la vuelta?

(*b*) $(S\cap T)^\circ = S^\circ\cap T^\circ$. ¿Sigue valiendo para una intersección infinita?

(*c*) $(S\cup T)^\circ \supseteq S^\circ\cup T^\circ$. Mostrar con un ejemplo que la inclusión puede ser estricta.

(*d*) $(\mathbb{R}^n - S)^\circ = \mathbb{R}^n - \overline{S}$.

(*e*) $\overline{\mathbb{R}^n - S} = \mathbb{R}^n - S^\circ$.

(*f*) Si $S\subseteq T$, entonces $\overline{S}\subseteq\overline{T}$. ¿Vale la vuelta?

(*g*) $\overline{S\cup T} = \overline{S}\cup\overline{T}$. ¿Sigue valiendo para una unión infinita?

(*h*) $\overline{S\cap T}\subseteq\overline{S}\cap\overline{T}$. Mostrar con un ejemplo que la inclusión puede ser estricta.

4 Para cada uno de los siguientes conjuntos $S\subseteq\mathbb{R}^n$, hallar S°, $\overline{S}$ y ∂S.

(*a*) $S=(0,1]$

(*b*) $S=[0,1]\cap\mathbb{Q}$

(*c*) $S=\left\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\right\}$

(*d*) $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq y\}$

(*e*) $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\leq x^2+y^2<4\}$

(*f*) $S=\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}$

5 Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

(*a*) Demostrar que S es abierto si y sólo si $S\cap\partial S=\emptyset$.

(*b*) Demostrar que S es cerrado si y sólo si $\partial S\subseteq S$.

(*c*) Demostrar que $p\in\partial S$ si y sólo si para todo $r>0$ la bola $B(p,r)$ contiene un punto que está en S y un punto que no está en S.

6 Sean S y T subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}^n$. Se define

$$S+T := \{s+t\ :\ s\in S, t\in T\}.$$

(*a*) Demostrar que si S es abierto entonces $S+T$ también lo es.

(b) ¿Es cierto que si S y T son cerrados entonces $S+T$ también lo es?

Sugerencia. Considerar $S = \left\{n + \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$ y $T = \mathbb{Z}$.

$\boxed{7}$ Demostrar que los únicos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que son abiertos y cerrados a la vez son $\varnothing$ y $\mathbb{R}$.

$\boxed{8}$ Una función $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ se llama una *norma* si cumple las siguientes propiedades:

- $N(v) = 0$ si y sólo si $v = (0, 0, \dots, 0)$,
- $N(\lambda \cdot v) = |\lambda| \cdot N(v)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y todo $v \in \mathbb{R}^n$,
- $N(v + w) \leq N(v) + N(w)$ para todos $v, w \in \mathbb{R}^n$.

Consideramos las funciones

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

(a) Demostrar que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ son normas.

(b) Demostrar que

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_1 \leq \sqrt{n} \cdot \|v\| \leq n \cdot \|v\|_\infty$$

para todo $v \in \mathbb{R}^n$, donde $\|v\|$ denota la norma euclídea.

Sugerencia. Para la segunda desigualdad, usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

$\boxed{9}$ Dada una norma N en $\mathbb{R}^n$, una *bola abierta para la norma N* es cualquier conjunto de la forma

$$B_N(p, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : N(x - p) < r\},$$

con $p \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$.

Si S es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, decimos que S es *abierto para la norma N* si para todo $p \in S$ existe $r > 0$ tal que la bola $B_N(p, r)$ está contenida en S.

Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Probar que son equivalentes:

(i) S es abierto para la norma $\|\cdot\|_\infty$.

(ii) S es abierto para la norma $\|\cdot\|_1$.

(iii) S es abierto (o sea, es abierto para la norma euclídea).

$\boxed{10}$ Sea K un subconjunto de $\mathbb{R}$. Demostrar que si K es compacto, entonces tiene máximo y mínimo. ¿Vale la vuelta?

$\boxed{11}$ Para cada $n \geq 2$ sea I_n el intervalo abierto $\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$.

(a) Demostrar que $(0, 1) = \bigcup_{n \geq 2} I_n$.

(b) ¿Existe algún subconjunto **finito** $F \subseteq \mathbb{N}_{\geq 2}$ tal que $(0, 1) = \bigcup_{n \in F} I_n$?

(c) ¿Es $(0, 1)$ un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$?

$\boxed{\textbf{12}}$ Sea $S = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}$. Demostrar que S es compacto.

$\boxed{\textbf{13}}$ Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de números reales y sea $P \subseteq \mathbb{R}$ el conjunto de sus puntos límites. Demostrar que P es compacto.

$\boxed{\textbf{14}}$ Sean S y T subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Demostrar las siguientes propiedades:

(a) Si S es acotado, entonces $\overline{S}$ es compacto.

(b) Si S y T son compactos, entonces $S \cup T$ es compacto. ¿Sigue valiendo para una unión infinita?

(c) Si S es compacto y T es cerrado, entonces $S \cap T$ es compacto.

(d) Si S es compacto y T es cerrado, entonces $S + T$ es cerrado.

(e) Si S y T son compactos, entonces $S + T$ es compacto.

$\boxed{\textbf{15}}$ Sean K y U subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ con K compacto, U abierto, y $K \subseteq U$. Demostrar que existe $r > 0$ tal que $\displaystyle\bigcup_{x\in K} B(x,r) \subseteq U$.

Sugerencia. Si esto no es cierto, para cada $n \in \mathbb{N}$ debe existir un punto $x_n \in K$ tal que la bola $B\left(x_n, \frac{1}{n}\right)$ no está contenida en U. Tenemos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en un compacto, entonces...