

Práctica 2: Series

1 Determinar cuáles de las siguientes series son convergentes:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3n - 1}{2n^2 + 3}$$

$$(d) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$$

$$(g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+3}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

$$(e) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(n)}$$

$$(h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n + 3}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

$$(f) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$$

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

2 Calcular la suma de las siguientes series:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-2}}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

3 Calcular la suma de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n^2 - 4n + 2}{n!}$.

Sugerencia. Descomponer el término general de la serie en la forma $\frac{A}{n!} + \frac{B}{(n-1)!} + \frac{C}{(n-2)!}$ con $A, B, C \in \mathbb{R}$ adecuados, y recordar que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

4 Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $|\alpha| < 1$. Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^{n-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$.

5 (a) Demostrar que para todo $k \in \mathbb{N}$ vale la siguiente desigualdad:

$$0 \leq \frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

(b) Sea $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Sumando sobre k , deducir de lo anterior que

$$0 \leq H_n - \ln(n+1) \leq 1$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) Concluir que la sucesión $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $r_n = H_n - \ln(n+1)$ es convergente.

Nota. El límite de $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se conoce como la *constante de Euler-Mascheroni* y se suele representar con la letra γ . Su valor numérico es 0,5722.... A diferencia de otras constantes “famosas” como π y e , aún no se sabe si γ es racional o irracional.

6 El objetivo de este ejercicio es calcular la suma de la serie armónica alternada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, que sabemos que converge por el criterio de Leibniz.

(a) Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale la siguiente identidad:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n+1}.$$

(b) El lado derecho de la igualdad anterior es $H_{2n+1} - H_n$. Usar lo probado en el ejercicio anterior para calcular el límite de esta expresión cuando $n \rightarrow \infty$.

(c) Concluir que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$.

7 Determinar si las siguientes series convergen absolutamente o condicionalmente:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n} \quad (b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{n!}$$

8 Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas, dando una demostración o un contraejemplo respectivamente.

(a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ es divergente.

(b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ es convergente.

(c) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ es convergente.

9 Demostrar que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge, entonces también converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$.

Sugerencia. Cauchy-Schwarz.

10 Determinar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los que resultan convergentes cada una de las siguientes series:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n + \sqrt{n}} \quad (e) \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2} \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right) \quad (f) \sum_{n=1}^{\infty} n!(x+1)^n$$

11 Probar el siguiente teorema, debido a Abel: si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de números positivos tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$.

Sugerencia. Observar que $0 \leq n a_{2n} \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n}$. ¿Qué es el lado derecho, y a dónde tiende cuando $n \rightarrow \infty$? Luego hacer algo similar para a_{2n+1} .

12 Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de números positivos. Definimos

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n \quad \text{y} \quad T_N = \sum_{n=0}^N 2^n a_{2^n}.$$

(a) Probar que $S_{2^{k-1}} \leq T_{k-1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Sugerencia. Recordar la demostración de la divergencia de la serie armónica.

(b) Probar que $T_k \leq 2S_{2^k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

(c) Deducir de lo anterior el *criterio de condensación de Cauchy*: si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de números positivos, entonces $\sum a_n$ es convergente si y sólo si $\sum 2^n a_{2^n}$ es convergente.