1. Sea $(X_1, X_2, ...)$ un proceso de Bernoulli de parámetro p.

   a) i. Calcule la probabilidad que haya menos de 5 éxitos entre los ensayos 27 y 47.
   ii. ¿Cuál es la probabilidad que el tercer éito haya ocurrido antes del ensayo 13?
   iii. ¿Cuál es la probabilidad que la tira 10001010111010 aparezca entre los ensayos 105 y 120?

   b) Sea $Y_i =$ instante del i-ésimo éxito. Calcule la probabilidad $P(Y_i = k)$.

   c) Sea $R_t = \text{mín}\{i?0 : X_{t+i} = 1\}$. Calcule $P(R_t = k|R_{t?1} = h)$.

2. Dadas X_i^l con distribución Bernoulli $(\frac{\lambda}{l})$ con $i \in \mathbb{N}$, sea el proceso binomial rescalado $(S_t^l, t \geq 0)$ definido por $S_t^l = \sum\limits_{i:i\leq lt} X_i^l$. Demuestre que los incrementos de S_t^l convergen en distribución a los incrementos de un proceso de Poisson, o sea, que $S_{t+h}^l - S_t^l$ converge en distribución a $N_{t+h} - N_t$.

3. Sea N un proceso de Poisson y sea $N_{(a,b]}=$ cantidad de ocurrencias en el intervalo $(a, b]$. Dados $T > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, mostrar que para cada $0 \leq a \leq b \leq T$ la variable aleatoria $N_{(a,b]}$ condicionada al evento $\{N_{(0,T]} = n\}$ tiene distribución $Bi(n, p_{b-a,T})$, donde $p_{b-a,T} = \frac{b-a}{T}$.
   ¿Se anima a conjeturar, basándose en este resultado, cuál debería ser la distribución conjunta condicionada al evento $\{N(0, T] = n\}$ de los n puntos del proceso de Poisson sobre el intervalo $[0, T]$?

4. Suponga que el número de goles que marca un equipo de fútbol puede ser descrito por un proceso de Poisson. Considere los siguientes equipos (procesos independientes): A, con tasa λ_A de goles por partido, y B, con tasa λ_B de goles por partido.

   a) Si se enfrentan A y B, ¿Cuál es la probabilidad de que A gane 2 a 1?

   b) Suponga que ha transcurrido el primer tiempo entre A y B, si se sabe que A va ganando 2 a 0, ¿cuál es la probabilidad de que el primer gol haya sido antes de 15 minutos y el segundo antes de 30 minutos?.

   c) Va a comenzar el segundo tiempo (A va ganando 2 a 0), ¿cuál es la probabilidad de que A marque 3 goles antes de los 30 minutos (sin importar lo que pase con B)?

   d) Suponga que el partido en su tiempo reglamentario (90 min.) quedó igualado 3 a 3. Sin embargo, es necesario definir el ganador, para ello se utilizará la modalidad “golden goal", es decir, el primero que marca el gol gana. ¿Cuál es la probabilidad de que el partido se prolongue por más de 45 minutos?

   e) Asuma que ahora se cambian las reglas a “two golden goals", es decir, el primer equipo que marca 2 goles consecutivos gana. ¿Cuál es la probabilidad de que gane B?.

5. Turistas extranjeros llegan en el verano a un balneario según un proceso de Poisson de tasa λ [turistas / mes]. Sabemos que, con probabilidad p_S, un turista que llega al balneario proviene de algún un país sudamericano, independientemente de los demás. Los turistas comienzan a llegar el 1 de enero.

   a) Si hasta mitad de mes han llegado m turistas en total, ¿cuál es la probabilidad que hasta fin de mes lleguen más de n turistas en total ($m \leq n$)?

   b) Dado que en un mes llegaron 1.000 turistas en total, ¿Cuál es la probabilidad que 500 de ellos sean sudamericanos?

   c) Es el 20 de enero y desde el 19 de enero no ha llegado ningún turista. ¿Cuál es la probabilidad que el siguiente veraneante que llegue sea sudamericano?

   d) En un mes llegaron 100.000 turistas en total. ¿Cuál es la probabilidad que la mitad de ellos hayan llegado durante la primera mitad del mes?

6. Juan almuerza en el comedor de la facultad todos los días de semana. Las opciones son milanesa, ensalada o pastas. Sus probabilidades de transición están dadas por

	M	**E**	**P**
M	0,15	0,6	0,25
E	0,4	0,1	0,5
P	0,1	0,3	0,6

Sabemos que el lunes Juan comió milanesas.

a) ¿Cuáles son las probabilidades para la comida del viernes (4 días después)?

b) ¿Cuáles son las probabilidades a largo plazo?

7. Probar que en una cadena con dos estados y matriz de transición $P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ para $a, b \in (0,1)$, la única distribución estacionaria será $\pi = (\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b})$.

8. Considerar las representaciones de la figura:

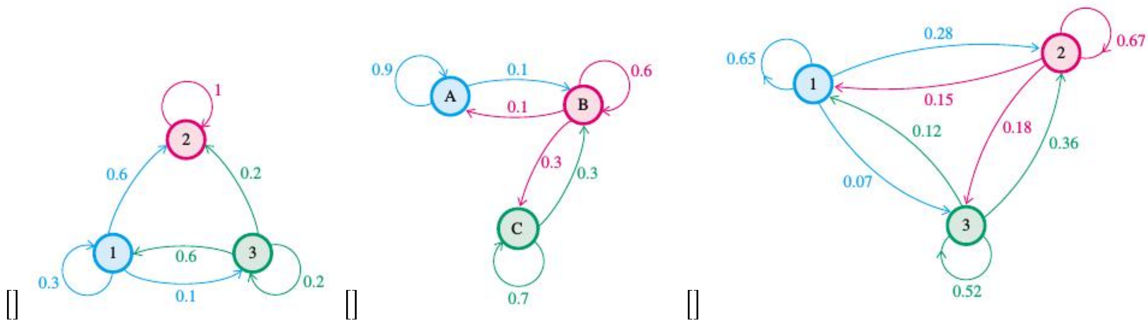

Figura 1: Grafos de transicion

Y para cada cadena explicitar la matriz asociada, decidir si admite distribución estacionaria (y en caso afirmativo, hallarla) y clasificar los estados.

9. Un profesor de sociología postula que en cada década, el 8 % de las mujeres trabajadoras deja de trabajar, y que el 20 % de las mujeres que no trabajaban empiezan a hacerlo. Comparar las predicciones de este modelo con los siguientes datos sobre los porcentajes de mujeres trabajadoras: 43.3 % en 1970, 51.5 % en 1980, 57.5 % en 1990, y 59.8 % en 2000. En un futuro lejano, ¿Qué fracción de mujeres estará trabajando?

10. Un agente comercial realiza su trabajo en tres ciudades A, B y C. Para evitar desplazamientos innecesarios está todo el día en la misma ciudad y allí duerme, desplazándose a otra ciudad al día siguiente, si es necesario. Después de estar trabajando un día en C, la probabilidad de tener que seguir trabajando en ella al día siguiente es 0,4, la de tener que viajar a B es 0,4 y la de tener que ir a A es 0,2. Si el viajante duerme un día en B, con probabilidad de un 20 % tendrá que seguir trabajando en la misma ciudad al día siguiente, en el 60 % de los casos viajará a C, mientras que irá a A con probabilidad 0,2. Por último si el agente comercial trabaja todo un día en A, permanecerá en esa misma ciudad, al día siguiente, con una probabilidad 0,1, irá a B con una probabilidad de 0,3 y a C con una probabilidad de 0,6.

a) Si hoy el viajante está en C, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga que trabajar en C al cabo de cuatro días?

b) ¿Cuáles son los porcentajes de días en los que el agente comercial está en cada una de las tres ciudades?