

Proba (M) - 4/6/17.

Clase práctica 16 - Más de convergencias, Ley de los grandes números, Slutsky.

1. Sea U una variable aleatoria con distribución $\mathcal{U}[0, 1]$ y para $n \in \mathbb{N}$ definamos la variable aleatoria X_n como

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } U \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Probar que $nX_n \xrightarrow{cs} 0$ pero que $(nX_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no tiene límite en L^p para ningún $p \geq 1$.

2. Dado $\alpha > 0$ sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes cada una con distribución Bernoulli de parámetro $n^{-\alpha}$, respectivamente.
- Probar que $X_n \xrightarrow{P} 0$ para todo $\alpha > 0$.
 - Probar que $X_n \xrightarrow{L^p} 0$ para todo $p \geq 1$ y $\alpha > 0$.
 - Estudiar para los distintos valores de $\alpha > 0$ la existencia de límite casi seguro de la sucesión $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En caso de existir tal límite, explicitarlo.
 - Calcular $P(L^+ = 1)$ para los distintos valores de $\alpha > 0$, donde $L^+ := \limsup_{n \rightarrow +\infty} X_n$.
 - Probar que $P(L^- = 0) = 1$ para todo $\alpha > 0$, donde $L^- := \liminf_{n \rightarrow +\infty} X_n$.

3. Sea Π una partición del intervalo $[0, 1]$ en k intervalos I_1, \dots, I_k de longitudes p_1, \dots, p_k , respectivamente. Definimos la entropía S_Π de la partición Π como

$$S_\Pi = - \sum_{j=1}^k p_j \log p_j.$$

Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución $\mathcal{U}[0, 1]$ y para cada $j = 1, \dots, k$ y $n \in \mathbb{N}$ definamos la variable aleatoria

$$Z_n^{(j)} = \#\{i \in \{1, \dots, n\} : X_i \in I_j\}.$$

Mostrar que $\frac{\log(R_n^{-1})}{n} \xrightarrow{cs} S_\Pi$, donde para cada $n \in \mathbb{N}$ se define $R_n = \prod_{j=1}^k p_j^{Z_n^{(j)}}$.

4. Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables independientes e idénticamente distribuidas con función de densidad

$$f(x) = 2\lambda x e^{-\lambda x^2} I_{(0, +\infty)}(x).$$

Dado $\alpha > 0$ definimos:

$$Y_n = n^\alpha \frac{(n - \lambda \sum_{i=1}^n X_i^2)}{(\sum_{i=1}^n X_i^2)^3}.$$

- Calcular el límite en distribución de $(\frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i^2})^2$.
- Probar que $Y_n \xrightarrow{D} N(0, \lambda^6)$ si $\alpha = \frac{5}{2}$.
- Probar que $Y_n \xrightarrow{P} 0$ si $\alpha < \frac{5}{2}$.
- Probar que $Y_n \xrightarrow{P} \infty$ si $\alpha > \frac{5}{2}$, es decir, para todo $M > 0$ vale que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Y_n| \leq M) = 0$. Deducir que $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no está acotada en probabilidad.