

**Probabilidad y Estadística (M).**  
**Clase Práctica 9: Vectores aleatorios continuos y cambio de variable.**

**Ejercicio 1.** Sea  $(X, Y)$  un vector aleatorio con la siguiente densidad conjunta

$$c \frac{x^2}{y^2} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \mathbb{1}_{(x^2, +\infty)}$$

- Hallar  $c$ .
- Hallar  $f_X$  y  $f_Y$ .
- Calcular  $P(Y \leq 1 | 0 \leq X \leq 1)$ .
- Hallar  $f_{Y|X=\frac{1}{3}}(y)$  y  $P(\frac{1}{10} \leq Y \leq 1 | X = \frac{1}{3})$ .

**Ejercicio 2.** Sea la función de densidad conjunta del vector  $(X, Y)$ :

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{4}(1 + x^3y - xy^3) \mathbb{1}_R(x, y)$$

Siendo  $R = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ .

- Probar que  $X$  e  $Y$  son uniformes.
- Calcular  $P(x < Y^2)$ .
- ¿Son independientes  $X$  e  $Y$ ?

**Ejercicio 3.** Sea  $(X, Y)$  un vector aleatorio continuo con función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2}, & \text{si } -1 < x < 1, 0 < y < x^2 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

- Hallar  $f_X$  y  $f_Y$  ¿Son  $X$  e  $Y$  independientes?
- Probar que  $\frac{Y}{X^2}$  tiene distribución  $U[0, 1]$  y es independiente de  $X$ .
- Hallar la densidad conjunta del vector  $(X^2, \frac{Y}{X^2})$ .