Funciones de probabilidad puntual (p_X) o densidad densidad (f_X), esperanzas, varianzas y funciones generadoras (M_X) de las variables aleatorias más frecuentes

I. Distribuciones discretas

Distribución Binomial $Bi(n, p)$

$$
\begin{aligned}
p_X(k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad k = 0, 1, \ldots, n \text{ y } \ 0 < p < 1 \\
E(X) &= np \\
var(X) &= np(1-p), \quad M_X(t) = [pe^t + (1-p)]^n
\end{aligned}
$$

Un caso particular de la distribución binomial es cuando $n = 1$. Esta distribución suele denominarse *Bernoulli* de parámetro p, $Be(p) = Bi(1, p)$.

Distribución Geométrica $Ge(p)$

$$
\begin{aligned}
p_X(k) &= p(1-p)^{k-1} \qquad \text{si } k = 1, 2, \ldots \text{ y } \ 0 < p < 1 \\
E(X) &= \frac{1}{p} \\
var(X) &= \frac{1-p}{p^2}, \quad M_X = \frac{p\,e^t}{1-(1-p)\,e^t}
\end{aligned}
$$

Distribución Binomial Negativa (o de Pascal) $BN(r, p)$

$$
\begin{aligned}
p_X(k) &= \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \qquad k = r, r+1, \ldots \text{ y } \ 0 < p < 1 \\
E(X) &= \frac{r}{p} \\
var(X) &= \frac{r(1-p)}{p^2}, \quad M_X = \left(\frac{p\,e^t}{1-(1-p)\,e^t}\right)^r
\end{aligned}
$$

La distribución geométrica es un caso particular de la distribución binomial negativa: $Ge(p) = BN(1, p)$.

Distribución Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

$$
\begin{aligned}
p_X(k) &= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad \text{si } k = 0, 1, 2, \ldots \text{ y } \lambda > 0 \\
E(X) &= \lambda \\
var(X) &= \lambda, \quad M_X(t) = e^{\lambda\left(e^t - 1\right)}
\end{aligned}
$$

Distribución Hipergeométrica $\mathcal{H}(N, B, m)$

N : total poblacional
B : cantidad de "buenos" en la población
m : cantidad de elementos extraídos (tamaño de la muestra)

$$
p_X(k) = \frac{\binom{B}{k}\binom{N-B}{m-k}}{\binom{N}{m}} \qquad \text{si } k \text{ es entero con } \max(B + m - N, 0) \le k \le \min(B, m)
$$

$$
\begin{aligned}
E(X) &= m\frac{B}{N} \\
var(X) &= m\frac{B}{N}\frac{(N-B)}{N}\frac{(N-m)}{(N-1)}
\end{aligned}
$$

II. Distribuciones continuas

Distribución Normal $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{con } \sigma > o \\
E(X) &= \mu \\
var(X) &= \sigma^2 \\
M_X(t) &= e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t}
\end{aligned}
$$

Distribución Gamma $\Gamma(\alpha, \lambda)$

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x) \qquad \text{con } \lambda > 0,\ \alpha > 0 \\
E(X) &= \frac{\alpha}{\lambda} \\
var(X) &= \frac{\alpha}{\lambda^2} \\
M_X(t) &= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^\alpha \mathbb{I}_{(-\infty,\lambda)}(t)
\end{aligned}
$$

Recordemos que el símbolo $\Gamma(\alpha)$ representa a la *función gamma* que se define por

$$
\Gamma(y) = \int_0^\infty x^{y-1} e^{-x} dx \qquad \text{si } y > 0
$$

Satisface las siguientes propiedades:

$$
\begin{aligned}
\Gamma(1) &= 1 \\
\Gamma(\alpha) &= (\alpha - 1)\, \Gamma(\alpha - 1) \\
\Gamma(n) &= (n-1)! \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots \\
\Gamma(1/2) &= \sqrt{\pi}
\end{aligned}
$$

La distribución χ_n^2 (chi cuadrado n) es un caso particular de la distribución gamma, $\chi_n^2 = \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Distribución Exponencial $Exp(\lambda)$

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x) \qquad \text{con } \lambda > 0 \\
E(X) &= \frac{1}{\lambda} \\
var(X) &= \frac{1}{\lambda^2} \\
M_X(t) &= \frac{\lambda}{\lambda - t} \mathbb{I}_{(-\infty,\lambda)}(t)
\end{aligned}
$$

La distribución exponencial es un caso particular de la distribución gamma: $Exp(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$.

Distribución Uniforme $\mathcal{U}[a, b]$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{b-a}\, \mathbb{I}_{[a,b]}(x) \\
E(X) &= \frac{a+b}{2} \\
var(X) &= \frac{(b-a)^2}{12} \\
M_X(t) &= \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}
\end{aligned}
$$