PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)

Práctica de cadenas de Markov

1. El departamento de estudios de mercado de una fábrica estima que el 20% de la gente que compra un producto un mes, no lo comprará el mes siguiente. Además, el 30% de quienes no lo compren un mes lo adquirirá al mes siguiente.

   (a) Calcular la matriz de probabilidades de transición de la cadena.

   (b) Dibujar el grafo asociado.

   (c) En una población de 1000 individuos, 100 compraron el producto el primer mes. ¿Cuál es el número esperado de componentes al cabo de un mes? ¿Y dentro de dos meses?

2. Juan almuerza en el comedor de la facultad todos los días de semana. Las opciones son milanesa, ensalada o pastas. Sus probabilidades de transición están dadas por

	M	**E**	**P**
M	0.15	0.6	0.25
E	0.4	0.1	0.5
P	0.1	0.3	0.6

   Sabemos que el lunes Juan comió milanesas.

   (a) ¿Cuáles son las probabilidades para la comida del jueves (3 días después)?

   (b) ¿Cuáles son las probabilidades a largo plazo?

3. El ascensor de un edificio con planta baja y dos pisos realiza viajes de uno a otro piso. El piso en el que finaliza el viaje n-ésimo del ascensor sigue una cadena de Markov. Se sabe que la mitad de los viajes que parten del la planta baja se dirigen a cada uno de los otros dos pisos, mientras que si un viaje comienza en el primer piso, sólo el 25% de las veces finaliza en el segundo. Por último, si un trayecto comienza en el segundo piso, siempre finaliza en la planta baja.

   (a) Calcular la matriz de probabilidades de transición de la cadena.

   (b) Dibujar el grafo asociado.

   (c) ¿Cuál es la probabilidad de que, a largo plazo, el ascensor se encuentre en cada uno de los tres pisos?

   (d) (Opcional) Simular, usando `R`, una cadena de 1000 elementos con las características dadas en el enunciado. Responda la pregunta del ítem anterior utilizando la cadena simulada.

4. El precio de una acción se mueve día a día dentro de los valores $\{1, 2, 3, 4\}$ (expresado en alguna unidad monetaria). Sea $X_n =$"el precio de la acción el día n". Si $X_n = j$ con $j = 2$ o 3, luego $X_{n+1} = j - 1$ con probabilidad 0.2 y $X_{n+1} = j + 1$ con probabilidad 0.8. Si $X_n = 1$ entonces $X_{n+1} = 2$ con probabilidad 1. Finalmente, si $X_n = 4$ entonces $X_{n+1} = 3$ con probabilidad 1. Claramente $\{X_n\}_{n\geq 1}$ es una cadena de Markov.

(a) Escribir la matriz de probabilidades de transición de la cadena.

(b) Dibujar el grafo asociado.

(c) Calcular el precio promedio de la acción en el largo plazo.

(d) (Opcional) Simular en `R` una cadena de 1000 elementos con estas características y utilizarla para responder la pregunta del ítem anterior.

5. Tenemos tres bolas blancas y tres bolas negras distribuidas en dos urnas de forma tal que cada urna contiene tres bolas. En cada paso saco una bola de cada urna y las cambio de urna. Sea $X_n =$"cantidad de bolas blancas en la primera urna el paso n".

   (a) Discutir por qué $\{X_n\}_{n\geq 1}$ es una cadena de Markov.

   (b) Dibujar el grafo asociado a esta cadena.

   (c) Encontrar la matriz de transición asociada a este problema.

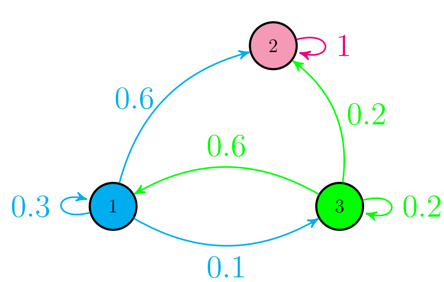
   (d) (Opcional) Simular en `R` una cadena de 1000 elementos con estas características.

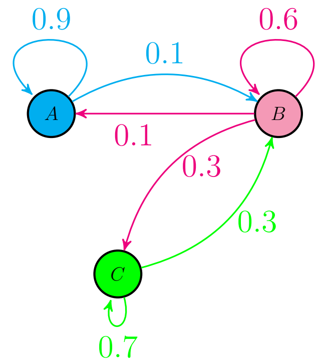
6. Un agente comercial realiza su trabajo en tres ciudades A, B y C. Para evitar desplazamientos innecesarios está todo el día en la misma ciudad y allí duerme, desplazándose a otra ciudad al día siguiente, si es necesario. Después de estar trabajando un día en C, la probabilidad de tener que seguir trabajando en ella al día siguiente es 0.4, la de tener que viajar a B es 0.4 y la de tener que ir a A es 0.2. Si el viajante duerme un día en B, con probabilidad 0.20 tendrá que seguir trabajando en la misma ciudad al día siguiente, en el 60% de los casos viajará a C, mientras que irá a A con probabilidad 0.2. Por último, si el agente comercial trabaja todo un día en A, permanecerá en esa misma ciudad al día siguiente con una probabilidad 0.1, irá a B con una probabilidad 0.3 y a C con una probabilidad de 0.6.

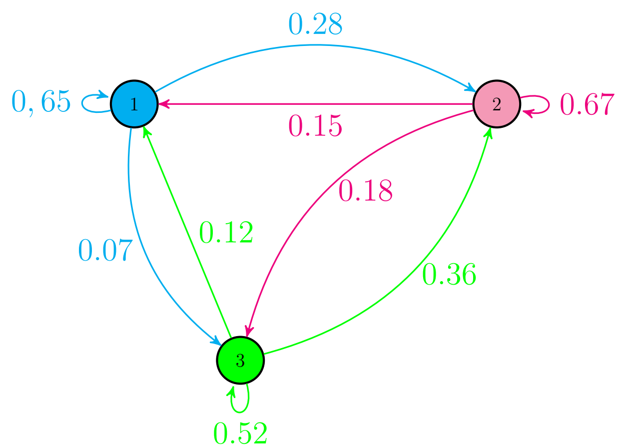
   (a) Si hoy el viajante está en C, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga que trabajar en C al cabo de cuatro días?

   (b) ¿Cuáles son los porcentajes de días en los que el agente comercial está en cada una de las tres ciudades?

7. Considerar las representaciones que figuran abajo y para cada una de ellas, explicitar la matriz de Markov asociada y hallar la distribución estacionaria en caso de que exista.







8. Probar que en una cadena con dos estados y matriz de transición $P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ para $a, b \in (0,1)$, la única distribución estacionaria será $\pi = \left(\dfrac{b}{a+b}, \dfrac{a}{a+b} \right)$. Analizar el caso $a = 0, b = 1$ y $a = 1, b = 1$.

9. Jésica tiene dos paraguas repartidos entre su casa y el trabajo (es decir, los dos en el trabajo o los dos en su casa o uno en cada lado). Cada vez que sale de su casa al trabajo a la mañana o del trabajo a su casa a la tarde y está lloviendo, se lleva un paraguas (si es que le queda alguno ahí). Si no le queda ninguno se moja. Suponiendo que en cada trayecto que debe hacer llueve de manera independiente de lo que pasó anteriormente con probabilidad $1/4$, considere la cadena de Markov en la que X_n representa la cantidad de paraguas que tiene Jésica en el lugar en que se encuentra. Es decir, X_1 es la cantidad de paraguas que tiene Jésica en su casa en la mañana del día 1, X_2 es la cantidad de paraguas que tiene Jésica en el trabajo en la tarde del día 1, X_3 es la cantidad de paraguas que tiene Jésica en su casa en la mañana del día 2, etc.

   (a) Completar la matriz de probabilidades de transición para la cadena de Markov.

$$\begin{pmatrix} \_ & \_ & 1 \\ 0 & \_ & \_ \\ \_ & 1/4 & \_ \end{pmatrix}$$

   (b) Hallar la probabilidad límite de que Jésica no tenga paraguas en un momento dado el lugar donde está.

10. En un centro de atención de reclamos de una empresa concesionaria del servicio de energía eléctrica, los expedientes por reclamos se mueven cada semana de una oficina a otra, de las cuatro que hay en el centro de atención. La dinámica de las oficinas es tal que un expediente que una semana está en la oficina de «reclamos menores» (M) a la semana siguiente pasa a la oficina de «dictamen rápido» (R). Los que caen allí luego vuelven en dos de cada tres casos a «reclamos menores», mientras que los restantes se redireccionan a «reclamos complejos» (C). Estos a su vez se devuelven en dos de cada tres casos a (M), mientras que los restantes se derivan a «estudio detallado» (D), y en una semana allí siempre se concluye que deben volver a (C). Por supuesto, la consecuencia es que los expedientes quedan dando vueltas entre las cuatro oficinas y ningún reclamo se soluciona.

    (a) Hallar la matriz de transición de semana a semana entre los cuatro estados M, R, C y D.

    (b) Un expediente se encuentra esta semana en la oficina de reclamos menores. ¿Cuál es la probabilidad de que en dos semanas se encuentre en la oficina de reclamos complejos?

11. (Opcional) Modelo de difusión de Bernoulli-Laplace. Considere dos urnas, cada una de ellas conteniendo m bolitas (hay $2m$ bolitas en total); b de ellas son negras y las restantes $(2m-b)$son rojas. Decimos que el sistema está en estado i si la primera urna contiene exactamente i bolitas negras y $m-i$ rojas, mientras que la segunda contiene $b-i$ negras y $m-b+i$ bolitas rojas. Cada experimento consiste en elegir una bolita al azar de cada urna e intercambiarlas. Sea X_n el estado del sistema después de n intercambios.

    (a) Discutir por qué $\{X_n\}_{n\geq 1}$ es una cadena de Markov y calcular su probabilidad de transición.

    (b) Verificar que la distribución estacionaria está dada por

$$\pi(i) = \frac{\binom{b}{i}\binom{2m-b}{m-i}}{\binom{2m}{m}}$$

    (c) ¿Puede dar una explicación intuitiva de por qué la fórmula anterior corresponde a la distribución estacionaria?