

Nombre y apellido..... Número de libreta.....

Por favor, al finalizar el examen señale claramente aquí qué ejercicios entrega

Entrego ejercicios 1 2 3 4

(Reservado para el corrector):

1	2	3	4	Nota

Por favor, resuelva cada ejercicio en hojas separadas. Numere todas las hojas y coloque en cada una su nombre y apellido. Para aprobar es necesario tener al menos 60 puntos. Justifique todas sus respuestas.

1. (25 puntos) Un kiosko vende cigarrillos de tres marcas, llamémoslas 1,2 y 3. Para cada $i = 1, 2, 3$ definimos la variable aleatoria X_i ="cantidad de paquetes de cigarrillos de la marca i vendidos en un día".

Se sabe que $E(X_1) = 48$, $E(X_2) = 32$ y $E(X_3) = 56$ y que $V(X_1) = 9$, $V(X_2) = 6$ y $V(X_3) = 5$. Se supone que la cantidad de paquetes vendidos de las distintas marcas son independientes entre sí y que la cantidad de paquetes vendidos en distintos días también son independientes.

- a) (9 puntos) Demostrar que la probabilidad exacta de que la cantidad total de paquetes de cigarrillos vendidos en un día esté entre 126 y 146 es mayor a 0.80.
- b) Si por cada paquete vendido de la marca 1 el kiosquero gana \$5, por cada paquete vendido de la marca 2 gana \$8 y por cada paquete vendido de la marca 3 gana \$4...
 - i. (8 puntos) Calcule la probabilidad aproximada de que en 40 días la ganancia total del kiosquero (por la venta de cigarrillos) se encuentre entre \$28800 y \$29000.
 - ii. (8 puntos) ¿Cuántos días deberán transcurrir para que la ganancia total de kiosquero (por la venta de cigarrillos) supere los \$30000 con probabilidad aproximada de por lo menos 0.97?

2. (20 puntos) En una determinada localidad tenemos tres Universidades: Jarvard (J), Osford (O) y Iale (I). De las personas que fueron a Jarvard, la mitad de sus hijos van también a Jarvard y el resto se distribuye equitativamente entre Osford y Iale. De las que fueron a Osford, el 80 % de los hijos va a la misma universidad y el resto se distribuye equitativamente entre las otras dos universidades. Los hijos de los que fueron a Iale se distribuyen equitativamente entre cada una de las tres universidades. Sea X_n = "universidad elegida por la n-ésima generación", supondremos que $\{X_n\}_{n \geq 1}$ es una cadena de Markov.

- a) (6 puntos) Exhiba la matriz de transición.
- b) (7 puntos) Sabiendo que una persona fue a Iale, determine la probabilidad de que su nieto vaya a Jarvard.
- c) (7 puntos) Calcule la distribución de la elección de universidad a largo plazo.

3. (30 puntos) Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria (es decir, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas) donde cada X_i tiene la siguiente densidad:

$$f(x; \theta) = \frac{5x^4}{\theta^5} I_{(0, \theta)}(x), \quad \theta > 0.$$

- a) (12 puntos) Hallar el estimador de máxima verosimilitud y probar que es consistente.
- b) (8 puntos) Hallar el estimador basado en el primer momento y probar que es consistente.
- c) (10 puntos) Hallar un intervalo de confianza de nivel exacto $1 - \alpha$ para θ . (*Sugerencia:* considerar $T = \frac{\max_{1 \leq i \leq n} \{X_i\}}{\theta}$).
4. (25 puntos) La producción anual de almendras (kg/ha) en una zona de la provincia de Mendoza tiene una distribución $N(512, 18^2)$. La publicidad de un nuevo sistema de riego afirma que con dicho sistema la producción media de almendras es mayor a 512 kg/ha. Para verificar si esto es cierto, un productor observa la producción anual de almendras de 14 parcelas elegidas al azar provistas del nuevo sistema de riego, obteniendo una media muestral de 525 kg/ha.
- a) (2 puntos) Se quiere que la probabilidad de decidir que el nuevo sistema de riego produce un rendimiento medio mayor cuando en realidad esto es falso sea 0.07. Plantee las hipótesis a testear.
- b) (5 puntos) Proponga un test adecuado para decidir entre las hipótesis del ítem anterior. Para ello especifique el estadístico del test, su distribución bajo H_0 y la región de rechazo. ¿Qué decisión toma en base a la muestra? Interprete la decisión en el contexto de este problema.
- c) (6 puntos) Calcule el p-valor (justifique cómo lo calcula). Sin hacer más cuentas, ¿qué decisión tomaría a nivel 0.01?
- d) (6 puntos) Para el test de nivel 0.07, ¿Cuál es la probabilidad de tomar una decisión incorrecta cuando la verdadera producción media con el nuevo sistema de riego es de 514 kg/ha?
- e) (6 puntos) ¿Qué tamaño de muestra debería utilizarse para que la probabilidad calculada en el ítem anterior sea a los sumo 0.20?