PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)

Práctica 6 - Parte A
Procesos de Poisson y Cadenas de Markov

1. Un alumno trae cada día a la Universidad una tableta de chocolate de 16 cm., y cada vez que le da un mordisco se come la mitad de lo que le queda. Asumiendo que la distribución de los mordiscos es un proceso de Poisson de párametro 2 mordiscos por hora.

   (a) Calcular la distribución del tiempo que transcurre hasta que aparece la primera mordida.

   (b) ¿Cuántos centímetros de chocolate se espera que le queden tras tres horas de clases?

   (c) ¿Qué probabilidad hay de que soporte la clase de 11:00 a 11:40 sin morder su tableta?

2. En una ventanilla se venden entradas para un concierto de rock. Los tiempos de llegada de los hombres y las mujeres corresponden a procesos de Poisson independientes con tasas 30 y 20 clientes por hora.

   (a) Cuál es la probabilidad de que los primeros tres clientes sean mujeres?

   (b) Si exactamente dos clientes llegan antes de los primeros 5 minutos, cuál es la probabilidad de que ambos hayan llegado en los primeros tres minutos?

   (c) Suponga que los clientes (sin importar su sexo) compran una entrada con probabilidad 1/2, dos entradas con probabilidad 2/5, y tres entradas con probabilidad 1/10. Sea $N^{(i)}$ el numero de clientes que compraron i entradas en la primera hora. Encuentre la distribución conjunta de $(N^{(1)}, N^{(2)}, N^{(3)})$.

3. Suponga que el número de goles que marca un equipo de fútbol puede ser descrito por un proceso de Poisson. Considere los siguientes equipos (procesos independientes) :

   Club Atlético Independiente : tasa λ_I goles/partido.

   Racing Club: tasa λ_R goles/partido.

   (a) Si se enfrentan, ¿Cuál es la probabilidad de que Independiente gane 2 a 1?

   (b) Suponga que ya ha transcurrido el primer tiempo. Si se sabe que Racing va ganando 2 a 0, ¿cuál es la probabilidad de que el primer gol haya sido antes de 15 min. y el segundo antes de 30 min.?

   (c) Va a comenzar el segundo tiempo (Racing va ganando 2 a 0), ¿cuál es la probabilidad de que Independiente marque 3 goles antes de los 30 min. (sin importar lo que pase con Racing)?

4. Turistas extranjeros llegan en el verano a un balneario según un proceso de Poisson de tasa λ[turistas / mes]. Sabemos que, con probabilidad p_S, un turista que llega al balneario proviene de algún un país sudamericano, independientemente de los demás. Los turistas comienzan a llegar el 1 de enero.

(a) Si hasta mitad de mes han llegado m turistas en total, ¿cuál es la probabilidad que hasta fin de mes lleguen más de n turistas en total ($m \leq n$)?

(b) Dado que en un mes llegaron 1.000 turistas en total, ¿Cuál es la probabilidad que 500 de ellos sean sudamericanos?

(c) Es el 20 de enero y desde el 19 de enero no ha llegado ningún turista. ¿Cuál es la probabilidad que el siguiente veraneante que llegue sea sudamericano?

(d) En un mes llegaron 100.000 turistas en total. ¿Cuál es la probabilidad que la mitad de ellos hayan llegado durante la primera mitad del mes?

5. Juan almuerza en el comedor de la facultad todos los días de semana. Las opciones son milanesa, ensalada o pastas. Sus probabilidades de transición están dadas por

	M	**E**	**P**
M	0.15	0.6	0.25
E	0.4	0.1	0.5
P	0.1	0.3	0.6

Sabemos que el lunes Juan comió milanesas.

(a) ¿Cuáles son las probabilidades para la comida del viernes (4 días después)?

(b) ¿Cuáles son las probabilidades a largo plazo?

6. El departamento de estudios de mercado de una fábrica estima que el 20% de la gente que compra un producto un mes, no lo comprará el mes siguiente. Además, el 30% de quienes no lo compren un mes lo adquirirá al mes siguiente.

(a) Calcular la matriz de probabilidades de transición de la cadena.

(b) Dibujar el grafo asociado.

(c) En una población de 1000 individuos, 100 compraron el producto el primer mes. ¿Cuántos lo comprarán al mes próximo? ¿Y dentro de dos meses?

7. El ascensor de un edificio con planta baja y dos pisos realiza viajes de uno a otro piso. El piso en el que finaliza el viaje n-ésimo del ascensor sigue una cadena de Markov. Se sabe que la mitad de los viajes que parten del la planta baja se dirigen a cada uno de los otros dos pisos, mientras que si un viaje comienza en el primer piso, sólo el 25% de las veces finaliza en el segundo. Por último, si un trayecto comienza en el segundo piso, siempre finaliza en la planta baja.

(a) Calcular la matriz de probabilidades de transición de la cadena.

(b) Dibujar el grafo asociado.

(c) Simular una cadena con estas características.

(d) ¿Cuál es la probabilidad de que, a largo plazo, el ascensor se encuentre en cada uno de los tres pisos? Responda esta pregunta usando dos métodos: simulación y convergencia a la medida invariante.

8. El precio de una acción se mueve día a día dentro de los valores $\{1, 2, 3, 4\}$ (expresado en alguna unidad monetaria). Sea $X_n =$ *el precio de la acción el día* n. Si $X_n = j$ con $j = 2$ o 3, luego $X_{n+1} = j - 1$ con probabilidad 0.2 y $X_{n+1} = j + 1$ con probabilidad 0.8. Si $X_n = 1$ entonces $X_{n+1} = 2$ con probabilidad 1. Finalmente, si $X_n = 4$ entonces $X_n = 3$ con probabilidad 1. Claramente (X_n) es una cadena de Markov.

   (a) Escribir la matriz de probabilidades de transición de la cadena.

   (b) Dibujar el grafo asociado.

   (c) Simular una cadena con estas características.

   (d) Calcular el precio promedio de la acción en el largo plazo. Responda esta pregunta usando dos métodos: simulación y convergencia a la medida invariante.

9. Tenemos tres bolas blancas y tres bolas negras distribuidas en dos urnas de forma tal que cada urna contiene tres bolas. En cada paso saco una bola de cada urna y las cambio de urna. Sea $X_n =$ Cantidad de bolas blancas en la primera urna el paso n.

   (a) Demostrar que $\{X_n\}_{n\geq 1}$ es una cadena de Markov.

   (b) Dibujar el grafo asociado a esta cadena.

   (c) Encontrar la matriz de transición asociada a este problema.

   (d) Simular una cadena con estas características.

10. Un agente comercial realiza su trabajo en tres ciudades A, B y C. Para evitar desplazamientos innecesarios está todo el día en la misma ciudad y allí duerme, desplazándose a otra ciudad al día siguiente, si es necesario. Después de estar trabajando un día en C, la probabilidad de tener que seguir trabajando en ella al día siguiente es 0.4, la de tener que viajar a B es 0.4 y la de tener que ir a A es 0.2. Si el viajante duerme un día en B, con probabilidad de un 20% tendrá que seguir trabajando en la misma ciudad al día siguiente, en el 60% de los casos viajará a C, mientras que irá a A con probabilidad 0.2. Por último si el agente comercial trabaja todo un día en A, permanecerá en esa misma ciudad, al día siguiente, con una probabilidad 0.1, irá a B con una probabilidad de 0.3 y a C con una probabilidad de 0.6.

    (a) Si hoy el viajante está en C, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga que trabajar en C al cabo de cuatro días?

    (b) ¿Cuáles son los porcentajes de días en los que el agente comercial está en cada una de las tres ciudades?

11. Probar que en una cadena con dos estados y matriz de transición $P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ para $a, b \in (0, 1)$, la única distribución estacionaria será $\pi = (\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b})$.

12. (Opcional) Modelo de difusión de Bernoulli-Laplace. Considere dos urnas, cada una de ellas conteniendo m bolitas; b de ellas son negras y las restantes $(2m - b)$ son rojas. Decimos que el sistema está en estado i si la primera urna contiene exactamente i bolitas negras y $m - i$ rojas, mientras que la segunda contiene $b - i$ negras y $(m - b + i)$ bolitas rojas. Cada experimento consiste en elegir una bolita al azar de cada urna e intercambiarlas. Sea X_n el estado del sistema después de n intercambios.

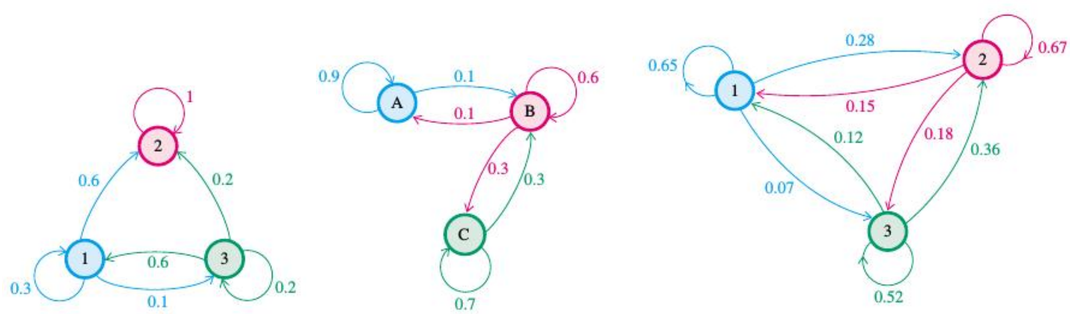
(a) Discutir por qué (X_n) es una cadena de Markov y calcular su probabilidad de transición.

(b) Verificar que la distribución estacionaria está dada por

$$\pi(i) = \frac{\binom{b}{i}\binom{2m-b}{m-i}}{\binom{2m}{m}}$$

(c) ¿Puede dar una explicación intuitiva de por qué la fórmula anterior corresponde a la distribución estacionaria?

13. Considerar las representaciones de la figura:



(a) (b) (c)

Figure 1: Grafos de transicion

Y para cada cadena explicitar la matriz asociada, decidir si admite distribución estacionaria (y en caso afirmativo, hallarla) y clasificar los estados.