

## PROBABILIDADES

### Trabajo Práctico 5

1. Sea  $X$  una variable aleatoria con función de distribución acumulada

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{8} x^3 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

a) Calcular, usando  $F_X$ ,

$$P(X \leq 1)$$

$$P(0.5 \leq X \leq 1)$$

$$P(X > 1.5)$$

b) Hallar la mediana de esta distribución.

c) Hallar la función de densidad  $f_X$ .

2. El diámetro  $D$ , expresado en dm, del tronco de cierta especie de árboles es una v.a. con función de densidad

$$f_D(x) = k x I_{(0,10)}(x)$$

a) Hallar el valor de la constante  $k$ .

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el diámetro de un árbol de esa especie mida entre 4 y 6 dm?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el diámetro de un árbol de esa especie mida entre 4 y 6 dm, si se sabe que es mayor de 5 dm?

d) En un área del bosque hay 3 árboles de esa especie. Suponiendo independencia entre los distintos diámetros, calcular la probabilidad de que exactamente 2 de ellos tengan un diámetro que mida entre 4 y 6 dm.

e) ¿Cuántos árboles habría que muestrear para que la probabilidad de encontrar al menos uno cuyo diámetro mida entre 4 y 6 dm, sea mayor o igual que 0.99?

3. Sea  $X$  una v.a. con función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} cx(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

a) Hallar la función de distribución de  $X$ .

b) Calcular  $P(X \leq \frac{1}{2} / \frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3})$ .

4. La fracción de alcohol  $X$  en cierto compuesto puede considerarse una v.a. con función de densidad

$$f_X(x) = c(1-x) I_{[0,1]}(x)$$

- a) Hallar el valor de la constante  $c$ .
- b) Supóngase que el precio de venta del compuesto depende del contenido de alcohol, de la siguiente manera: si  $X < \frac{1}{3}$  el precio es 1 \$, si  $\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}$  el precio es 2 \$ y si  $X > \frac{2}{3}$ , el precio es 3 \$. Hallar la distribución del precio del compuesto.

5. Se dice que una v.a.  $X$  tiene distribución simétrica respecto de  $\theta$  si y sólo si:

$$P(X \leq \theta - h) = P(X \geq \theta + h) \quad \text{para todo } h > 0$$

- a) Dar dos ejemplos de v.a. con distribución simétrica, una discreta y otra continua.
- b) Sea  $X$  una v.a. continua, probar que son equivalentes:
  - i.  $X$  tiene distribución simétrica respecto de  $\theta$
  - ii.  $P(X \leq x) = P(X \geq 2\theta - x)$
  - iii.  $F_X(x) = 1 - F_X(2\theta - x)$
  - iv.  $f_X(x) = f_X(2\theta - x)$
  - v.  $f_X(\theta - x) = f_X(\theta + x)$ .

6. Sea  $Z$  una v.a con distribución  $N(0, 1)$ , calcular:

- a)  $P(0 \leq Z \leq 2)$
- b)  $P(|Z| \leq 2.5)$
- c)  $P(Z \geq -1.3)$
- d)  $c$  tal que  $P(Z < c) = 0.98$
- e)  $c$  tal que  $P(|Z| < c) = 0.90$
- f) el valor  $Z_\alpha$ , para  $\alpha = 0.05, 0.01$  y  $0.001$ .

7. Sea  $X$  una v.a con distribución  $N(\mu, \sigma^2)$ ,

- a) Hallar la distribución de la v.a.

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

- b) Si  $\mu = 5$  y  $\sigma = 0.5$ , calcular
  - i.  $P(4.75 \leq X \leq 5.50)$
  - ii.  $P(|X| > 5.25)$

- iii.  $c$  tal que  $P(|X - 5| \leq c) = 0.90$
- iv. el 0.90-percentil de  $X$ .

**8.** Se supone que en una cierta población humana, el índice cefálico  $I$  (anchura del cráneo expresada como porcentaje de su longitud) se distribuye normalmente. Si hay un 58 % de individuos con  $I \leq 75$ , un 38 % con  $75 < I \leq 80$  y un 4 % con  $I > 80$ , hallar la función de densidad de la v.a.  $I$  y calcular  $P(78 \leq I \leq 82)$ .

**9.** Se desarrolló una estrategia de decisión para optimizar ganancias eligiendo entre dos acciones distintas I y II con probabilidades 0.35 y 0.65, respectivamente. La rentabilidad de la acción I es una v.a. con distribución  $N(1.9, 0.16)$  y la de la acción II es una v.a. con distribución  $N(2.2, 0.09)$ .

- a) Hallar la probabilidad de que la rentabilidad de la estrategia desarrollada sea mayor o igual que 2.1.
- b) Dado que la rentabilidad es mayor o igual que 2.1, hallar la probabilidad de que se haya seleccionado la acción I.

**10.** La vida útil (en meses) de un componente electrónico es una v.a.  $V$  con distribución exponencial, tal que  $P(V > 20) = 0.449$ .

- a) Hallar la probabilidad de que la vida útil de uno de estos componentes sea mayor de 10 meses.
- b) Un sistema consta de 5 componentes electrónicos conectados en serie. Al fallar uno cualquiera de éstos, se desconecta el sistema. Se supone que los tiempos de vida de los componentes son independientes, o sea que si se definen los eventos:

$A_i =$  "el  $i$ -ésimo componente dura hasta el instante  $t$ ", con  $1 \leq i \leq 5$ ,  
 estos eventos son independientes.

Sea  $X$  el tiempo en el cual el sistema falla.

- i. Escribir el evento  $\{X \geq t\}$  en función de los  $A_i$ .
- ii. Usando la independencia de los  $A_i$ , calcular  $P(X \geq t)$ .
- iii. Hallar la función de distribución y la función de densidad de la v.a.  $X$ .

**11.** La confiabilidad de un componente (o sistema) en el tiempo  $t$ ,  $R(t)$ , está definida como  $R(t) = P(T > t)$ , donde  $T$  es la duración del componente (una variable aleatoria, con función de densidad  $f_T(t)$  y función de distribución  $F_T(t)$ ).

- a) Expresar la función de confiabilidad  $R(t)$ , en términos de la función de distribución de la v.a.  $T$ ,  $F_T(t)$ .
- b) Expresar la función de confiabilidad  $R(t)$ , en términos de la función de densidad de la v.a.  $T$ ,  $f_T(t)$ .

- c) Explique porqué a la función  $Z(t) = f_T(t)/R(t)$ , se la suele denominar tasa de riesgo, o tasa de falla instantánea.
- d) Si se sabe que la tasa de riesgo es una constante  $a > 0$ , halle la función de densidad subyacente,  $f_T(t)$ .

**12.** Dado un proceso de Poisson de intensidad  $\lambda$ , sea  $T$  el tiempo de espera hasta la primera ocurrencia del evento a partir del instante inicial. Probar que  $T$  tiene distribución exponencial de parámetro  $\lambda$ .

**13.** Sea  $X$  una v.a. con distribución Gamma de parámetros  $n$  y  $\lambda$  ( $n$  natural y  $\lambda > 0$ ), o sea con función de densidad:

$$f_X(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} I_{(0,\infty)}(x)$$

Probar que:

$$F_X(x) = P(Y \geq n)$$

donde  $Y \sim P(\lambda x)$ .

**14.** Sea  $Z$  una v.a. con distribución  $N(0, 1)$ . Probar que  $Z^2$  tiene distribución  $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . (Esta distribución recibe el nombre  $\chi^2$  con un grado de libertad)

**15.** Sea  $X$  una v.a. con distribución exponencial de parámetro 2. Sea  $Y = [X]$  (parte entera de  $X$ ). Hallar la distribución de la v.a.  $Y$ .

**16.** Se dice que una v.a.  $X$  tiene distribución logarítmica normal de parámetros  $\mu$  y  $\sigma^2$  ( $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$ ) si su densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2\right] I_{[0,\infty)}(x)$$

Comprobar que si  $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$ , entonces  $Y = \ln X \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

**17.** Se dice que una v.a.  $X$  tiene distribución Weibull de parámetros  $\nu$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  ( $X \sim W(\nu, \alpha, \beta)$ ), con  $\alpha > 0, \beta > 0$ , si su densidad es

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x - \nu}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x - \nu}{\alpha}\right)^\beta\right] I_{(\nu,\infty)}(x)$$

- a) Probar que si  $X \sim W(\nu, \alpha, \beta)$ , entonces  $Y = \left(\frac{X - \nu}{\alpha}\right)^\beta$  tiene distribución exponencial de parámetro 1.

b) Sean  $a$  y  $b$  mayores que  $\nu$ , sea  $X \sim W(\nu, \alpha, \beta)$  y sea

$$G(a, b) = P(X \geq (a + b) / X \geq a).$$

Probar que:

- i. si  $\beta > 1$ , entonces  $G(a, b)$  es una función decreciente de  $a$  (Propiedad de "desgaste").
- ii. si  $\beta < 1$ , entonces  $G(a, b)$  es una función creciente de  $a$ .

**18.** Se dice que una v.a.  $X$  tiene distribución logística de parámetros  $\mu$  y  $\tau$  ( $X \sim L(\mu, \tau)$ ), con  $\tau > 0$ , si su densidad es

$$f_X(x) = \frac{\exp(\frac{x-\mu}{\tau})}{\tau[1 + \exp(\frac{x-\mu}{\tau})]^2}$$

y se dice que una v.a.  $Y$  tiene distribución loglogística de parámetros  $\kappa, \lambda$ ,  $\kappa > 0, \lambda > 0$  ( $Y \sim LL(\kappa, \lambda)$ ), si su densidad es

$$f_Y(y) = \frac{\kappa y^{\kappa-1} \lambda^\kappa}{[1 + (y\lambda)^\kappa]^2} I_{[0, \infty)}(y)$$

Probar que si  $Y \sim LL(\kappa, \lambda)$ , entonces  $X = \kappa \ln(\lambda Y)$  tiene distribución logística.

**19.** Sea  $X$  una v.a. con distribución  $U(0, 1)$ . Hallar las funciones de distribución y de densidad de las siguientes variables aleatorias.

- a)  $cX + d$
- b)  $X^\alpha$ , siendo  $\alpha$  un número real
- c)  $\ln X$
- d)  $\frac{X}{X+1}$
- e)  $-\frac{1}{\lambda} \ln(1 - X)$ , siendo  $\lambda > 0$ .

**20. Generación de números al azar**

- a) Usando el ejercicio 18 a), generar, a partir de una muestra aleatoria de variables con distribución  $U(0, 1)$ , una muestra aleatoria de variables con distribución  $U(3, 8)$ .
- b) Usando el ejercicio 18 e), generar, a partir de una muestra aleatoria de variables con distribución  $U(0, 1)$ , una muestra aleatoria de variables con distribución exponencial de parámetro 10.

- c) Generar, a partir de una muestra aleatoria de variables con distribución  $U(0, 1)$ , una muestra aleatoria de variables con la siguiente distribución uniforme discreta:

$$p_X(k) = \frac{1}{100} \quad \text{si } k = 0, 1, \dots, 99.$$

- d) Generar, a partir de una muestra aleatoria de variables con distribución  $U(0, 1)$ , una muestra aleatoria de variables con distribución  $Bi(1, 1/3)$ .
- e) Generar, a partir de una muestra aleatoria de variables con distribución  $U(0, 1)$ , una muestra aleatoria de variables con distribución de Poisson de parámetro 5.

21. a) Sea  $X$  una v.a. con función de distribución

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{4} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{x}{6} & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ \frac{x}{8} + \frac{1}{4} & \text{si } 4 \leq x < 6 \\ 1 & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$

- i. Graficar esta función de distribución. ¿La v.a.  $X$  es discreta o continua?
- ii. Sean  $A = [1, 5]$  y  $B = (\frac{1}{2}, 3)$ , calcular  $P(A)$ ,  $P(B/A)$  y  $P(B/A^c)$ .
- b) Sea  $X$  una v.a. con función de densidad

$$f(x) = \frac{2}{9} x I_{(0,3)}(x)$$

y sea

$$h(t) = \begin{cases} t & \text{si } t < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \\ 3 - t & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

Hallar la función de distribución de la v.a.  $Y = h(X)$ , y expresarla como combinación convexa de dos funciones de distribución, una correspondiente a una v.a. continua y otra a una v.a. discreta.