Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

Optimización

Primer Cuatrimestre 2018

Práctica N° 3: Optimización con restricciones.

Consideraremos dos tipos de problemas:

$$(P_h)\begin{cases} \min f(x) \\ h(x)=0 \end{cases} \qquad (P_g)\begin{cases} \min f(x) \\ h(x)=0 \\ g(x)\leq 0 \end{cases}$$

Además, notaremos: $M=\{y : \nabla h(x)\cdot y=0\}$, que depende de x y de las restricciones.

Ejercicio 1 Sea $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ de rango m y $f\in C^2$ convexa. Consideremos el problema:

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &s.a: Ax=b, \end{aligned} \tag{1}$$

y sea $\bar{x}$ tal que $A\bar{x}=b$. Probar que, para cierta $B\in\mathbb{R}^{n\times(n-m)}$, a partir de las soluciones de

$$\min f(\bar{x}+Bz), \tag{2}$$

pueden obtenerse soluciones de (1). ¿Quién es B?

Ejercicio 2 Escribir las iteraciones de los métodos del gradiente y de Newton para (2) en función de las derivadas de f y de B.

Ejercicio 3 Probar que si $h(x)=Ax+b$, la regularidad no es necesaria para la validez del teorema de los multiplicadores de Lagrange para (P_h).

Ejercicio 4 En $\mathbb{R}^2$ considere las restricciones

$$\begin{cases} x_1\geq 0 \\ x_2\geq 0 \\ x_2-(x_1-1)^2\leq 0 \end{cases}$$

Muestre que el punto $(1,0)$ es factible pero no es un punto regular.

Ejercicio 5 Considerar el siguiente problema de programación no lineal:

$$\begin{cases} \min 3x_1^2+x_2^2+2x_3^2-6x_1-10x_2-4x_3+800 \\ x_1+x_2+x_3=20 \\ 2x_1+4x_3=24 \end{cases}$$

a) Formular el problema de multiplicadores de Lagrange asociado.

b) Calcular (x^*, λ^*).

c) Verificar que $y^t \nabla^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) y > 0, \ \forall y \in M, y \neq 0$.

d) Concluir que x^* aproxima a un minimizador local estricto del problema original.

e) Resolver el problema original utilizando el método de Newton o del gradiente modificado según el Ejercicio 1.

f) Resolver usando alguna función de Penalidad Conveniente.

Ejercicio 6 Considerar el siguiente problema de programación no lineal:

$$\begin{cases} \text{mín}\, 2e^{3x_1} + 3x_2^2 + 5x_3^4 + 4 \\ \|x\| = 4 \\ \sum_{i=1}^{3} x_i = 3 \end{cases}$$

a) Resolver el problema parametrizando las restricciones.

b) Calcular el lagrangiano y aplicarle el algoritmo de Newton con los siguientes valores iniciales: a) $(1, 2, 3, 4, 5)$ y b) $(-10, 20, -3, 1, 1)$.

c) Resolver usando funciones de Barrera.

Ejercicio 7 Encontrar el rectángulo de máxima área de un perímetro dado, resolviendo las ecuaciones necesarias de primer orden. Verificar que se satisfacen las condiciones suficientes de segundo orden.

Ejercicio 8 Consideremos el análogo unidimensional del problema de superficies mínimas: dada $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, buscamos una función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ que minimice:

$$J(f) = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx,$$

sujeta a las restricciones: $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [0, 1]$, $f(0) = a$, $f(1) = b$.

a) Realizar una discretización del problema.

b) Implementar un algoritmo de Gradiente Proyectado que lo resuelva.

Ejercicio 9 Dada $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ con $x \in \Omega$. Donde $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 10 \text{ y } x_1^2 + x_2^2 \leq 225\}$

a) Plantear las condicions de K-K-T y el problema asociado de minimización sin restriciones.

b) Busque un mínimo utilizando una función de Barrera conveniente.

Ejercicio 10 (Entropía) Considere una función de probabilidad discreta que corresponde a que un valor tome uno de n valores $x_1, ...x_n$ con probabilidad p_i. Los p_i satisfacen $p_i \geq 0$ y $\sum_i p_i = 1$. La entropía de dicha densidad es:

$$\epsilon = -\sum p_i \log(p_i).$$

Si la media de la densidad es conocida ($m = \sum_i x_i p_i$), hallar mediante un planteo de programación no lineal el valor de máxima entropía.

Ejercicio 11 Considere el problema:

$$\begin{aligned} &\min\ f(x) \\ &\text{sujeto a } g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{3}$$

Sean $\bar{x}$ un punto factible, $I = \{i : g_i(\bar{x}) = 0\}$ y los vectores $\nabla g_i(\bar{x})$, con $i \in I$ linealmente independientes. Supongamos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de clase C^1 en $\bar{x}$ y que cada g_i con $i \in I$ es de clase C^1 en $\bar{x}$ y cóncava en $\bar{x}$. Además, las g_i con $i \notin I$ son continuas en $\bar{x}$. Consideremos el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} &\min\ \nabla f(\bar{x})^t d \\ &\text{sujeto a } \nabla g_i(\bar{x})^t d \leq 0 \quad \forall i \in I \\ &\qquad\quad \text{-}1 \leq d_j \leq 1 \quad \forall j = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{4}$$

Sea d^* una solución óptima de (4) con valor objetivo z^*.

(a) Mostrar que $z^* \leq 0$.

(b) Mostrar que si $z^* < 0$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que $\bar{x} + \lambda d^*$ es **factible** para (3) y $f(\bar{x} + \lambda d^*) < f(\bar{x}) \quad \forall \lambda \in (0, \delta)$.

(c) Mostrar que si $z^* = 0$, entonces $\bar{x}$ satisface las condiciones de primer orden de KKT.

Sugerencia: Recordar que los problemas de programación lineal:

$$\begin{aligned} &\min\ c^t x \\ &\text{sujeto a } Ax \geq b \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} &\max\ y^t b \\ &\text{sujeto a } y^t A = c^t \\ &\qquad y \geq 0, \end{aligned}$$

son duales y por consiguiente sus valores objetivos coinciden en las soluciones óptimas.

Ejercicio 12 Utilizar las condiciones suficientes de segundo orden de KKT para probar que si $x_1, \cdots, x_n \geq 0$, entonces

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \geq (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\frac{1}{n}}.$$

Sugerencia: Considerar el problema auxiliar:

$$\begin{aligned} &\max \prod_{i=1}^{n} x_i \\ &\text{sujeto a} \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ &\qquad x_i \geq 0 \quad \forall i. \end{aligned}$$

Ejercicio 13 Buscar N puntos y un radio tal que las áreas de los círculos formados maximicen la superficie dentro de un cuadrado de lado a.

a) Plantee el problema (funcional a maximizar y restricciones).

b) Plantear el problema asociado usando las condiciones KKT.

c) Proponer una función de Penalidad y otra de Barrera para intentar aproximar las soluciones.

Ejercicio 14 Implementar un algoritmo de minimización para el problema anterior y graficar los círculos encontrados. Trabajar en un cuadrado $a = b$ y con N chico, $N = 2, 3$.
Sugerencias: Plantear funciones de Penalidad y/o Barrera convenientes. Considerar también que en el algoritmo haya algunos pasos de búsqueda local para tener un mejor candidato a dato inicial.

Ejercicio 15 Implementar un algoritmo que generalice el ejercicio anterior para cualquier número de círculos y en un rectángulo de lado a y altura b.