Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

Optimización

Primer Cuatrimestre 2018

Práctica N° 1: Minimización sin restricciones.

Generalidades:

Ejercicio 1 Mostrar ejemplos de las siguientes situaciones:

(a) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que todos los puntos de $[0, 1]$ sean extremos locales de f.

(b) $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que f tenga varios minimizadores locales y globales.

(c) $\Omega \subset \mathbb{R}$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continua tal que f no tenga extremos absolutos en Ω.

(d) $\Omega \subset \mathbb{R}$ compacto y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que f no tenga extremos absolutos en Ω.

(e) $\Omega \subset \mathbb{R}$ compacto y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ acotada tal que f no tenga extremos absolutos en Ω.

Ejercicio 2 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, continua tal que $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$ entonces f tiene un minimizador global en $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 3 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua tal que $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n$ de modo que el conjunto de nivel $\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \leq f(x_0)\}$ es acotado, entonces f tiene un minimizador global en $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 4 Considerar los números reales $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$. Resolver los

1. Minimizar $\sum_{i=1}^n |x - a_i|$
2. Minimizar Máximo $\{|x - a_i|, i = 1, \ldots, n\}$
3. Minimizar $\sum_{i=1}^n |x - a_i|^2$
4. Maximizar $\Pi_{i=1}^n |x - a_i|$

Ejercicio 5 Encontrar los puntos críticos de

$$f(x) = 2x_1^3 - 3x_1^2 - 6x_1x_2(x_1 - x_2 - 1)$$

¿Cuáles de esos son minimizadores o maximizadores, locales o globales?

Ejercicio 6 Sea $f(x) = (x_1 - x_2^2)(x_1 - \frac{1}{2}x_2^2)$. Verificar que, para $x = (0, 0)$, $\lambda = 0$ es un minimizador local de $\phi(\lambda) = f(x + \lambda d)$ para todo $d \in \mathbb{R}^2$, pero x no es un minimizador local de f.

Ejercicio 7 Sea $f(x) = (x_2 - x_1^2)^2 + x_1^5$. Hallar los puntos críticos de f. ¿Cuáles de esos son minimizadores o maximizadores, locales o globales?

Ejercicio 8 Encontrar, si es posible, a y b de manera que $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ tenga un máximo local en $x = 0$ y un mínimo local en $x = 1$.

Ejercicio 9 Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2(1 - x_1)^3$$

1. Realice un gráfico de la función e identifique un minimizador local.
2. ¿Existe un único minimizador local?
3. ¿Es este un caso donde existe un único minimizador local estricto, el cual no es global?

Ejercicio 10 Encontrar ejemplos donde:

(a) x^* es minimizador local de f en Ω, pero $\nabla f(x^*) \neq 0$

(b) x^* es minimizador local de f en Ω, $\nabla f(x^*) = 0$, pero $\nabla^2 f(x^*)$ no es semidefinida positiva.

(c) Ω es abierto, $\nabla f(x^*) = 0$ pero x^* no es minimizador local.

(d) Ω es abierto, $\nabla f(x^*) = 0$, $\nabla^2 f(x^*) \geq 0$, pero x^* no es minimizador local.

(e) Ω es abierto, x^* minimizador local estricto, pero $\nabla^2 f(x^*)$ no sea definida positiva.

Ejercicio 11 Sea $f(x, y, z) = 2x^2 + xy + y^2 + yz + z^2 - 6x - 7y - 8z + 9$,

a) Usando las condiciones de primer orden, encuentre un punto mínimo de f.

b) Verifique que el punto es un mínimo relativo verificando que se cumplen las condiciones de segundo orden.

c) Pruebe que el punto es un mínimo global.

Ejercicio 12 Sea $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ una función cuadrática, $f(x) = \frac{1}{2}x^T Q x - b^T x + c$. Escribir un algoritmo que verifique si f tiene un mínimo y, en tal caso lo encuentre resolviendo un sistema de ecuaciones apropiado.

Ejercicio 13 Escribir un algoritmo que dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, un punto $a \in \mathbb{R}^n$ y un índice i, $1 \leq i \leq n$, aproxime $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Ejercicio 14 Utilizando el programa del ejercicio anterior, escribir programas que calculen $\nabla f(a)$ y $Hf(a)$, para f y a dados.

Ejercicio 15 Escribir un programa que dada una f y un punto inicial x_0 busque un mínimo x^* de f usando el algoritmo de Newton generalizado. Pruébelo para i) el caso del Ejercicio 6 y ii) para la función $f(x, y, z) = -1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4 - 4y + y^2 + 4z + 6z^2 + 4z^3 + z^4$.

Ejercicio 16 Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Probar que minimizar $f(x)$ es equivalente a minimizar $g(f(x))$.

Funciones Convexas:

Ejercicio 17 Probar que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es estrictamente convexa y tiene mínimo, entonces el mínimo es único. Dar un ejemplo de función estrictamente convexa sin mínimo.

Ejercicio 18 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ estrictamente convexa con un único mínimo x^*. Probar que $f(x) \to \infty$ cuando $\|x\| \to \infty$.

Ejercicio 19 Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ un conjunto de funciones convexas definidas sobre un conjunto convexo Ω. Muestre que la función $f(x) = \sup_{i\in I} f_i(x)$ es convexa en la región en la cual es finita.

Ejercicio 20 Sea γ un función monótona no decreciente de una variable, es decir $r' > r$ implica $\gamma(r') \geq \gamma(r)$, que además es convexa y sea f una función convexa definida en un conjunto convexo. Muestre que la función $\gamma(f)$ definida como $\gamma(f)(x) = \gamma(f(x))$ es convexa sobre Ω.

Ejercicio 21 Sea $f \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Muestre que una condición necesaria y suficiente para que un punto x^* en el interior de Ω sea un mínimo relativo de f es que $\nabla f(x^*) = 0$ y que f sea localmente convexa en x^*.